MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

23. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

V. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

23. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bohr, H., Einige Sätze über Fourierreihen fastperiodischer Funktionen 38

Falckenberg, H., Verallgemeinerung der Gauß-Studyschen Untersuchungen über Dreiflache (Kreisbogendreiecke) auf Vierflache 210

Hardy, G. H. und J. E. Littlewood, Some problems of 'Partitio Numerorum' (VI): Further Researches in Waring's Problem 1

Kaczmarz, St., Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen . . 263

Knopp, K., Über eine paradoxe Eigenschaft gewisser bedingt konvergenter unendlicher Reihen 254

Kowalewski, G., Die Identitätsbedingungen der natürlichen Geometrie 246

Krull, W., Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen 161

Lavrentieff, M., Sur une équation différentielle du premier ordre 197

Lichtenstein, L., Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I. 72

Lichtenstein, L., Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze 89

Lichtenstein, L., Ergänzungen zu der Abhandlung: „Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze“ 310

Nevanlinna, F. u. R., Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion . . 159

Okada, Y., Über die Annäherung analytischer Funktionen 62

Szegö, G., Über einen Satz von A. Markoff 45

Urysohn†, P., Zur ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Ein Fall der Unlösbarkeit 155

Volk, O., Über die Entwicklung von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen nach Laméschen Funktionen 224

Walther, A., Über die reellen Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z)$ 238

Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I. 271

Some problems of 'Partitio Numerorum' (VI): Further researches in Waring's Problem[1].

By

G. H. Hardy in Oxford and J. E. Littlewood in Cambridge.

1. Introduction.

1.1. In this memoir we continue the researches of the first, second and fourth memoirs of the series.

The memoir falls into three parts. In the first (§§ 2—6) we are concerned with properties of 'almost all' positive integers n. We say that almost all numbers n possess the property P if the number of numbers less than n, for which P is false, is $o(n)$ when n is large. Thus almost all numbers are composite.

We suppose throughout that $k > 2$. We denote by

$$r(n) = r_s(n) = r_{k,s}(n)$$

the coefficient of x^n in

$$(f(x))^s = \left(1 + 2\sum_1^\infty x^{m^k}\right)^s. \tag{1.11}$$

We write

$$a = \frac{1}{k}, \quad K = 2^{k-1}, \quad \varkappa = 1 - \frac{1}{K}, \quad \mathfrak{C} = \frac{(2\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)}; \tag{1.12}$$

$$\varrho(n) = \varrho_s(n) = \varrho_{k,s}(n) = \mathfrak{C} n^{sa-1} \sum_{q=1}^\infty \mathfrak{A}_q(n) = n^{sa-1}\mathfrak{S}(n), \tag{1.13}$$

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of "Partitio Numerorum": (I) A new solution of Waring's Problem (Göttinger Nachrichten, 1920, 33—54); (II) Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates (Mathematische Zeitschrift 9 (1921), 14—27); (IV) The singular series in Waring's Problem, and the value of the number $G(k)$ (ibidem 12 (1922), 161—188). We refer to these memoirs as P. N. 1, P. N. 2, P. N. 4.

We shall also have occasion to refer to the fifth memoir (P. N. 5), viz. 'A further contribution to the study of Goldbach's Problem (Proc. London Math. Soc. (2) 22 (1923), 46—56). This memoir, though concerned with a different problem, contains, in a different setting, several of the essential ideas of our present analysis.

where

$$\mathfrak{A}_q(n) = \sum_p \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np), \tag{1.14}$$

$$e(x) = e^{2\pi i x}, \qquad e_q(x) = e\left(\frac{x}{q}\right), \qquad S_{p,q} = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k), \tag{1.15}$$

$p = 0$ for $q = 1$, while otherwise p runs through the numbers less than and prime to q; and

$$\sigma(n) = \sigma_s(n) = \sigma_{k,s}(n) = r_{k,s}(n) - \varrho_{k,s}(n). \tag{1.16}$$

Our argument involves a number of parameters, and of letters used in conventional senses, so that our system of notation requires very careful explanation.

Our principal variables are n, k, s, ε, and δ. Of these, ε is an arbitrary positive number; δ is also positive, and both ε and δ are to be thought of as small. The choice of δ, which has to be made so as to satisfy the varying requirements of our analysis, is always subsequent to that of k, s, and ε.

We use the letters A, B, C, with or without suffixes, to denote positive numbers whose value varies from one occurrence to another. When no suffix is used, A is an absolute constant (such as 2); $B = B(k)$ is a function of k only; and $C = C(k, s)$ a function of k and s.

Sometimes, however, A, B, C will depend on other parameters, in which case these parameters will be indicated explicitly by suffixes. Thus

$$B_\varepsilon = B(k, \varepsilon), \qquad C_{\varepsilon,\delta} = C(k, s, \varepsilon, \delta).$$

In *exponents*, we use c instead of C. When c occurs not in an exponent, our conventions do not apply, and all the variables on which c depends are shown by suffixes.

The symbols O, o refer to the passage of n to infinity. Thus $f = O(\varphi)$, where f and φ are functions of n (and in general of k, s or other parameters also) means that $|f| < M\varphi$. Here M is a number of one of the types A, B, C; and it is to be understood, unless the contrary is stated, that M involves *all parameters whose occurence is possible in the nature of the case*. If any parameter is missing, we say that the result holds uniformly in that parameter.

Similarly $f = o(\varphi)$ means that $\frac{f}{\varphi} \to 0$ when $n \to \infty$, or that, if η is any positive number, then $|f| < \eta\varphi$ for $n \geqq n_0(\eta, \alpha, \beta, \ldots)$, where $\alpha, \beta, \ldots$ are some of the parameters k, s, ε, δ; and again it is to be understood, unless the contrary is stated, that all possible parameters are involved.

1.2. We prove first

Theorem 1. *If*

$$s \geqq \left(\tfrac{1}{2}k-1\right)K+3 \tag{1.21}$$

hen

$$\sum_{m=1}^{n}(\sigma(m))^2 = \sum_{m=1}^{n}(r(m)-\varrho(m))^2 = O(n^{2s\alpha-1-c}). \tag{1.22}$$

From this we deduce

Theorem 2. *If* $k \neq 4$, *then almost all numbers are sums of* $\left(\frac{1}{2}k-1\right)K+3$ *non-negative* k*-th powers; and in particular of* 5 *cubes,* 7 *fifth powers,* 67 *sixth powers,* 163 *seventh powers,* 387 *eighth powers,* 99 *ninth powers, and* 2051 *tenth powers. The number of non-representable numbers is in all cases* $O(n^{1-c})$.

The result for cubes is considerably in advance of anything proved before, the utmost that is known being that a finite proportion of numbers are sums of 7 cubes[2]).

The case $k=4$ is abnormal, since then $\left(\frac{1}{2}k-1\right)K+3 = 11 < 15$, while the singular series $\mathfrak{S}(n)$ vanishes, for all numbers of appropriately chosen arithmetical progressions, for any value of s less than 15. In this case we prove

Theorem 3. *Almost all numbers are sums of* 15 *biquadrates.*

In this theorem, 15 is the correct number, and cannot be replaced by any smaller number. If $G_1(k)$ is the smallest value of s for which almost all numbers are sums of s non-negative k-th powers, then

$$G_1(4) = 15, \tag{1.23}$$

while $G_1(3)$ is either 4 or 5, and $G_1(5)$ may be any number from 6 to 17 inclusive.

1.3. In the second part of the memoir (§ 7) we return to $G(k)$. The best upper bounds known for $G(3)$, $G(4)$, ..., $G(k)$, ..., are 8, 21, 53, 133, ..., $(k-2)K+5$, ... Our object is to improve these numbers (apart from $G(3)$, with which we can do nothing) by combining the results of the first part with a simple elementary idea. We prove

Theorem 4. *If* $k > 3$ *then*

$$G(k) \leqq \left(\tfrac{1}{2}k-1\right)K+k+5+[\zeta_k], \tag{1.31}$$

[2]) That is to say, there is a constant A such that more than An numbers less than n are sums of 7 cubes. This result is due to Baer (W. S. Baer, Über die Zerlegung der ganzen Zahlen in sieben Kuben, Mathematische Annalen 74 (1913), 511—514).

where

$$\zeta_k = \frac{(k-2)\log 2 - \log k + \log(k-2)}{\log k - \log(k-1)}. \tag{1.32}$$

In particular, all large numbers are sums of 19 *biquadrates,* 41 *fifth powers,* 87 *sixth powers,* 193 *seventh powers,* 425 *eighth powers,* 949 *ninth powers, and* 2113 *tenth powers.*

We can still prove nothing new for cubes; but the result for biquadrates is particularly interesting. All numbers from a certain number N_4 onwards are sums of 19 biquadrates, and it would be possible to determine a numerical bound for N_4. Now $g(4) \geqq 19$ (since $79 = 4 \cdot 2^4 + 15 \cdot 1^4$ actually requires 19 biquadrates). The determination of the actual value of $g(4)$, whether it be in fact 19 or some higher number, is thus theoretically reducible to a problem of computation.

1.4. The third part (§ 8) stands on a different footing, since it depends on an unproved hypothesis, viz.

Hypothesis K. *The number of representations of n by k k-th powers is $O(n^\varepsilon)$ for every positive ε.*

This hypothesis (a separate hypothesis for each value of k) is equivalent to

$$r_{k,k}(n) = O(n^\varepsilon). \tag{1.41}$$

It is true when $k = 2$[3]), but has not been proved for any higher value of k. Its consequences in Waring's Problem are very striking, and it is well worth while to investigate them in anticipation of a proof.

We prove first

Theorem 5. *If Hypothesis K is true, then* (1.22) *is true for* $s \geqq k+1$.

From this follows

Theorem 6. *If Hypothesis K is true,* $k \neq 4$, *and*

$$\Gamma_1(k) = \mathrm{Max}(\Gamma(k), k+1), \tag{1.42}$$

where $\Gamma(k)$ is the least value of s for which the singular series is always positive, then almost all numbers are sums of $\Gamma_1(k)$ non-negative k-th powers. In particular almost all numbers are (on Hypothesis K) sums of 4 *cubes,* 6 *fifth powers,* 9 *sixth powers,* 8 *seventh powers,* 32 *eighth powers,* 13 *ninth powers, and* 12 *tenth powers. The number of non-representable numbers is in any case $O(n^{1-c})$.*

---

[3]) E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Göttinger Nachrichten (1912), 687—771 (750).

It was proved by Hurwitz[4]) that

$$G_1(k) \geqq k+1,$$

nd by us[5]) that

$$G_1(k) \geqq \Gamma(k),$$

xcept when $k=4$. Hence, except in this case,

$$G_1(k) \geqq \Gamma_1(k).$$

Combining this inequality with Theorem 6, we obtain

Theorem 7. *If Hypothesis K is true, and* $k \neq 4$, *then*

1.43) $$G_1(k) = \Gamma_1(k).$$

As $\Gamma(k)$ can be calculated, with sufficient labour, for any k, the problem of $G_1(k)$ would be solved completely if Hypothesis K were proved.

Finally we prove

Theorem 8. *If Hypothesis K is true, then*

1.44) $$r_{k,s}(n) = \varrho_{k,s}(n) + O(n^{sa-1-c})$$

or $s \geqq 2k+1$;

from which follows

Theorem 9. *If Hypothesis K is true, and*

1.45) $$\Gamma_2(k) = \mathrm{Max}\,(\Gamma(k), 2k+1),$$ [6])

hen all large numbers are sums of $\Gamma_2(k)$ *non-negative k-th powers; and in particular of* 7 *cubes,* 16 *biquadrates,* 11 *fifth powers,* 13 *sixth powers,* 15 *seventh powers,* 32 *eighth powers,* 19 *ninth powers, and* 21 *tenth powers.*

We show also that when (as is usually the case), $\Gamma(k) \leqq k+1$, Theorem 9 may be deduced in an elementary manner from Theorem 6[7]).

It can hardly be doubted that the numbers of Theorem 9 are far closer to the realities of the problem than any given before. It is not too much to say that, if Hypothesis K were proved, Waring's Problem would be within measurable distance of a final solution.

---

[4]) A. Hurwitz, Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n-ten Potenzen ganzer Zahlen, Mathematische Annalen 65 (1908), 424—427.

[5]) See P. N. 4, 179 (Theorem 4). The ground of the inequality $G(k) \geqq \Gamma(k)$ being (except for $k=4$) the existence of a forbidden arithmetical progression, the same inequality holds for $G_1(k)$.

[6]) In fact $\Gamma_2(k) = 2k+1$ except when k is a power of 2, in which case it is $4k$.

[7]) This deduction is still possible in the exceptional cases, but the proof requires elaboration.

k	$=$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(k)$	$\leqq$	4	9	37	58	478	3806	31353	— [8]	140004
$g(k) \geqq \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] + 2^k - 2$	$=$	4	9	19	37	73	143	279	548	1079
$G(k) \leqq \begin{matrix}(k-2)\,2^{k-2}+k+5+[\zeta_k]^{[8a]} (k>3) \\ 4 \quad (k=2), \quad 8 \quad (k=3)\end{matrix}$	$=$	4	8	19	41	87	193	425	949	2113
$G(k) \leqq \mathrm{Max}\,(k+1,\ \Gamma(k))$	$=$	4	4	16	6	9	8	32	13	12
$G_1(k) \leqq \begin{matrix}(k-2)\,2^{k-2}+3 \quad (k \neq 2, 4) \\ 4 \quad (k=2), \quad 15 \quad (k=4)\end{matrix}$	$=$	4	5	15	27	67	163	387	899	2051
$G_1(k)$	$\geqq$	4	4	15	6	9	8	32	13	12
$\Gamma(k)$	$=$	4	4	16	5	9	4	32	13	12
On Hypothesis K $G(k) \leqq \begin{matrix}\mathrm{Max}\,(2k+1,\ \Gamma(k)) \quad (k>2) \\ 4 \quad (k=2)\end{matrix}$	$=$	4	7	16	11	13	15	32	19	21
$G_1(k) = \begin{matrix}\mathrm{Max}\,(k+1,\ \Gamma(k)) \quad (k \neq 4) \\ 15 \quad (k=4)\end{matrix}$	$=$	4	4	15	6	9	8	32	13	12

[8]) No upper bound for $g(9)$ is known.

[8a]) See (1.32) for the definition of ζ_k.

It may be useful that we should exhibit, in the form of a table, all that is known about the numbers $g(k)$, $G(k)$, $G_1(k)$, $\Gamma(k)$ for $2 \leqq k \leqq 10$. We may repeat that $g(k)$, $G(k)$, $G_1(k)$ are the least numbers s such that *all, all large, almost all* numbers are sums of s k-th powers; while $\Gamma(k)$ is, *except for* $k = 4$, (a) the least number s for which the singular series is positive for every n, and (b) the least number s such that every arithmetical progression contains an infinity of representable numbers. When $k = 4$, $\Gamma(k) = 16$, while (a) and (b) are true for $s \geqq 15$, but for no lower value of s.[9])

2. Further definitions.

2.1. We must begin by defining a number of additional symbols.

In our earlier memoirs we used the 'Farey dissection' of order $N = [n^{1-\alpha}]$, the 'major arcs' $\mathfrak{M}$ and 'minor arcs' $\mathfrak{m}$ of the dissection being defined by $q \leqq n^\alpha$ and $q > n^\alpha$ respectively. It was then shown by Weyl[10]) and Landau[11]) that our argument could be simplified by using a different dissection, viz. that of order $[n^{1-\alpha}]$, where $\alpha = \frac{aK}{K+1}$. Here we use two dissections, each different from either of those used before.

In the proof of Theorems 1—4 we use the dissection of order

$$N_1 = [n^{1-\alpha_1}], \tag{2.11}$$

where

$$\alpha_1 = \alpha_1(k, \delta) = a - \delta \tag{2.12}$$

and δ is positive and small. The choice of δ will be subsequent to that of k, s, ε, so that δ will then become a function of those variables, tending to zero with ε. The major and minor arcs will be defined by

$$q \leqq n^{\alpha_1}, \qquad q > n^{\alpha_1} \tag{2.13}$$

and denoted by $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{m}_1$.

In the proof of Theorems 5—9 (those which depend upon Hypothesis K) we use a quite different dissection, viz. that of order

$$N_2 = [n^{1-3\alpha}], \tag{2.14}$$

the major and minor arcs $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{m}_2$ being defined by

$$q \leqq n^\alpha, \qquad q > n^\alpha. \tag{2.15}$$

---

[9]) See P. N. 4, 179, f. n. [28]). This point about $k = 4$ is overlooked on p. 188 (last sentence).

[10]) H. Weyl, Bemerkung über die Hardy-Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem, Göttinger Nachrichten 1921, 189—192.

[11]) E. Landau, Zum Waringschen Problem, Hilbert Festschrift (1922), 423—451 [Math. Zeitschr. 12 (1921), 219—247].

Here α is a number of the type c, which will be chosen small enough to fulfil the demands of our analysis.

2.2. We use $\xi = \xi_{p,q}$, as hitherto, for a 'Farey arc' in general. We write

$$x = |x| e^{i\psi} = e^{-\frac{1}{n}+i\psi} \tag{2.211}$$

and (on the arc $\xi_{p,q}$)

$$x = e_q(p) e^{-\nu}, \qquad y = \frac{1}{n} + i\theta, \qquad \theta = \frac{2p\pi}{q} - \psi. \tag{2.212}$$

We write also

$$\varphi = \varphi_{p,q} = 2\Gamma(1+\alpha)\frac{S_{p,q}}{q}\frac{1}{y^\alpha}. \tag{2.22}$$

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{s\alpha-1} z^m \qquad (|z|<1), \tag{2.23}$$

$$F(x) = F(x, k, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_s(m) x^m = \sum_{m=1}^{\infty} m^{s\alpha-1} \mathfrak{S}(m) x^m, \tag{2.24}$$

$$F_{p,q} = \mathfrak{C}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s \sum_{m=1}^{\infty} m^{s\alpha-1} (x e_q(-p))^m = \mathfrak{C}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s g(x e_q(-p)). \tag{2.25}$$

Finally, we write

$$\mathfrak{S}_1(n) = \mathfrak{C} \sum_{q \leqq \nu} \mathfrak{A}_q(n), \qquad \mathfrak{S}_2(n) = \mathfrak{C} \sum_{q > \nu} \mathfrak{A}_q(n), \tag{2.26}$$

so that

$$\mathfrak{S}(n) = \mathfrak{S}_1(n) + \mathfrak{S}_2(n); \tag{2.261}$$

and

$$F_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{s\alpha-1} \mathfrak{S}_1(m) x^m, \qquad F_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{s\alpha-1} \mathfrak{S}_2(m) x^m, \tag{2.27}$$

so that

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x). \tag{2.271}$$

Then

$$F_1 = \mathfrak{C} \sum_{p,q \leqq \nu} \sum_{m} \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s m^{s\alpha-1} (x e_q(-p))^m = \sum_{p,q \leqq \nu} F_{p,q}, \tag{2.281}$$

[11a]

and similarly

$$F_2 = \sum_{p,q \geqq \nu} F_{p,q}. \tag{2.282}$$

We shall take

$$\nu = n^\beta; \tag{2.29}$$

β will be chosen later.

We suppose always that $n > 1$.

[11a]) This notation means that we sum for $q \leqq \nu$ and for all values of p associated with each such q.

3. Lemmas concerning the singular series.

3.1. We have frequently to appeal in what follows to the results nd arguments of P. N. 4, and we must begin by revising slightly a por- on of that memoir. An incorrect argument in the proof of Lemma 15, which our attention was called by Prof. Landau, affects the results Lemmas 15, 16 and 17, and the proofs, though not the results, of heorems 15, 16 and 17. It happens that the correction is relevant to ie present memoir.

Lemma 1[12]. *We have, for* $s > 0$,

3.111) $$|\mathfrak{A}_p(n)| < C p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s} \qquad (p+n),$$

3.112) $$|\mathfrak{A}_p(n)| < C p^{1-\frac{1}{2}s} \qquad (p \mid n);$$

3.121) $$|X_p - 1| < C p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s} \qquad (p+n),$$

3.122) $$|X_p - 1| < C p^{1-\frac{1}{2}s} \qquad (p \mid n,\ p^k+n),$$

3.13) $$1 - C p^{1-\frac{1}{2}s} < X_p < (1+p^{k-s}+\ldots+p^{\beta(k-s)})(1+C p^{1-\frac{1}{2}s}) \quad ((p^k)^\beta \mid n).$$[12a]

lso

3.14) $$|X_p - 1| < C p^{-\frac{s}{2}} \qquad (s \geqq k+2).$$

Here (3.121) and (3.122) give the corrected form of Lemma 15, 3.13) that of Lemma 16, and (3.14) that of Lemma 17.

The result (3.111) is correctly proved on p. 176; and (3.112) follows y the same argument, the only difference being that the 'inner sum' is ie trivial $O(p)$ instead of $O(\sqrt{p})$.[13] The subsequent argument of the ext is a correct deduction of (3.122) from (3.112), provided we write $(p^{1-\frac{1}{2}s})$ for $O(p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s})$ in the two places in which the latter occurs. he other formula (3.121) is, of course, merely a convenient restatement f (3.111), since $X_p = 1 + \mathfrak{A}_p$ when $p+n$.

If now we substitute, in the proofs of Lemmas 16 and 17, correct xpressions from (3.11), (3.12) in place of incorrect expressions from emma 15, and leave the arguments otherwise unchanged, we obtain 3.13) and (3.14).

3.2. The remaining Lemmas and Theorems of P. N. 4 are actually ue, but the proofs of Theorems 15, 16, and 17 have to be revised. We equire Theorem 15 in the sequel, and restate it.

---

[12]) Here $\mathfrak{A}$, p, X are the A, π, χ of P. N. 4.

[12a]) This notation means that $(p^k)^\beta$ is the highest power of p^k which divides n: ee P. N. 4, 166. The β here has of course no connection with that of (2.29).

[13]) Our mistake there lay in failing to distinguish the two cases.

Lemma 2. *If* $s \geqq \mathrm{Max}(\Gamma(k), 4)$ *then*

$$\mathfrak{S}(n) > C. \tag{3.21}$$

The original proof, when corrected, requires the 4 to be replaced by 5. But the result is still valid when $k = 4$.[14]) For if $s = \Gamma(k) = 4$, k is odd, since otherwise $\gamma_2 = 2^{\theta+2} > 4$. Then, writing

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \prod_{\mathfrak{p}+n} \mathsf{X}_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}|n} \mathsf{X}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{C}\, \Pi_1 \Pi_2,$$

we have

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} > 1 - C\mathfrak{p}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s} = 1 - C\mathfrak{p}^{-\frac{3}{2}} > 1 - \mathfrak{p}^{-\frac{5}{4}} \qquad (\mathfrak{p} > C) \tag{3.22}$$

in Π_1, by (3.121). On the other hand, in Π_2, $S_{p,\mathfrak{p}}$ is real, $S^4_{p,\mathfrak{p}}$ is positive or zero, and (since $\mathfrak{p}|n$)

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \sum S^4_{p,\mathfrak{p}}\, e_{\mathfrak{p}}(-np) = \sum S^4_{p,\mathfrak{p}} \geqq 0.$$

If now $\beta = 0$ we have[15])

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} = 1 + \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} + \sum_{2}^{\nu+1} \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}^\lambda} = 1 + \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} - \mathfrak{p}^{1-s} \geqq 1 - \mathfrak{p}^{-3}; \tag{3.23}$$

while if $\beta > 0$ we have[16])

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} \geqq \mathsf{X}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) \geqq 1 - \mathfrak{p}^{-3} \tag{3.24}$$

by (3.23), since $\beta = 0$ for $n = \mathfrak{p}$. From (3.22) to (3.24) we obtain

$$\mathfrak{S} > C \prod_{\mathfrak{p}+n,\, \mathfrak{p}<C} \mathsf{X}_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}+n} (1 - \mathfrak{p}^{-\frac{5}{4}}) \prod_{\mathfrak{p}|n} (1 - \mathfrak{p}^{-3}) > C,$$

since $\mathsf{X}_{\mathfrak{p}}$ is positive when $\mathfrak{p}$ is fixed and $s \geqq \Gamma(k)$, and has only a finite number of distinct values for different values of n.

3.3. In the proof of Theorem **16** we have, by (3.13) above,

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} < (1 + \mathfrak{p}^{-2} + \mathfrak{p}^{-4} + \ldots)(1 + C\mathfrak{p}^{-\frac{3}{2}}) < 1 + C\mathfrak{p}^{-\frac{3}{2}},$$

and the theorem follows.

In the proof of Theorem **17** we have $s \geqq k > 3$. Hence

$$\mathfrak{S} \leqq C \prod_{\mathfrak{p}+n} \mathsf{X}_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}|n} \mathsf{X}_{\mathfrak{p}} < C \prod_{\mathfrak{p}|n} \mathsf{X}_{\mathfrak{p}},$$

since

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} < 1 + C\mathfrak{p}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s} < 1 + C\mathfrak{p}^{-\frac{3}{2}} \qquad (\mathfrak{p}+n).$$

If $\mathfrak{p}|n$, we have, by (3.13),

$$\mathsf{X}_{\mathfrak{p}} < 1 + C\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{2}s}\varrho_{\mathfrak{p}},$$

---

[14]) We owe this observation to Prof. Landau.

[15]) P. N. 4, 176, (4.14) and the equation five lines lower.

[16]) P. N. 4, 177, (4.22).

where $\varrho_\mathfrak{p} = 1$ unless $\mathfrak{p}^k \mid n$, and then $\varrho_\mathfrak{p} = 1 + \beta$. Thus

$$\chi_\mathfrak{p} < \left(1 + \frac{C}{\mathfrak{p}}\right) \varrho_\mathfrak{p} < \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{p}}\right)^{-c} \varrho_\mathfrak{p},$$

$$\prod_{\mathfrak{p} \mid n} \chi_\mathfrak{p} < \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^c \prod_{\mathfrak{p} \mid n} \varrho_\mathfrak{p}.$$

The first factor here is less than n^ε for sufficiently large n, and it is proved in the original argument that the same is true of the second. Hence

$$\mathfrak{S} < n^\varepsilon$$

for sufficiently large n, the result desired.

3.4. **Lemma 3.** *We have*

$$\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right| < B q^{-\alpha}, \tag{3.41}$$

and

$$|\mathfrak{A}_q(m)| < C q^{1-s\alpha} \tag{3.42}$$

for $m = 1, 2, 3, \ldots$ [17]).

It is enough to prove (3.41), (3.42) being an obvious corollary; and it is enough, in virtue of the multiplication theorem [18]) for $S_{p,q}$, to prove (3.41) (i) when $(q, k) = 1$ and (ii) when q is a product of powers of primes which divide k.

(i) If $\mathfrak{p} + k$, we have [19])

$$\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}^{\alpha k+\mu}}}{\mathfrak{p}^{\alpha k+\mu}}\right| = \mathfrak{p}^{-\alpha-1} \leqq (\mathfrak{p}^{\alpha k+\mu})^{-\alpha} \tag{3.431}$$

for

$$\alpha \geqq 0, \qquad 1 < \mu \leqq k,$$

and

$$\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}^{\alpha k+1}}}{\mathfrak{p}^{\alpha k+1}}\right| = \mathfrak{p}^{-\alpha}\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}}\right| = (\mathfrak{p}^{\alpha k})^{-\alpha}\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}}\right| \tag{3.432}$$

for $\alpha \geqq 0$. Write now

$$q = q_1 q_2^k Q, \tag{3.44}$$

where Q contains all factors $\mathfrak{p}^r$ of q for which r is not congruent to 1 (mod k), and q_1 is a product of different primes. It follows from the multiplication theorem and the inequalities (3.43) that

$$\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right| \leqq (q_2^k Q)^{-\alpha}\left|\frac{S_{p,q_1}}{q_1}\right|, \text{ [20])}$$

---

[17]) Compare P. N. 5, 49 (Lemma 5). The argument there is simpler.

[18]) P. N. 2, 18.

[19]) P. N. 2, 19–21.

[20]) Here, and in the formulae which follow, the values of the p's, which differ from formula to formula, are irrelevant.

so that it is enough to prove (3.41) when $q = q_1$. But, if $q = q_1 = \Pi \mathfrak{p}_1$, we have [21])

$$\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}_1}}{\mathfrak{p}_1}\right| < \frac{B}{\sqrt{\mathfrak{p}_1}} < \mathfrak{p}_1^{-\alpha}$$

for $\mathfrak{p}_1 > B$, and so

$$\left|\frac{S_{p,q_1}}{q_1}\right| = \Pi\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}_1}}{\mathfrak{p}_1}\right| < \prod_{\mathfrak{p}_1 \leqq B} B \prod_{\mathfrak{p}_1 > B} \mathfrak{p}_1^{-\alpha} < B q_1^{-\alpha}. \tag{3.45}$$

This is (3.41) for $q = q_1$.

(ii) Suppose that $\mathfrak{p}^\theta \mid k$, where $\theta > 0$, that

$$\lambda = \alpha k + \mu > k \geqq \theta + 2, \qquad 0 < \mu \leqq k,$$

and

$$h = \mathfrak{p}^{\lambda-\theta-1} z + h'.$$

Then [22])

$$p h^k \equiv p h'^k + p z P h'^{k-1} \mathfrak{p}^{\lambda-1} \pmod{\mathfrak{p}^\lambda},$$

where $(P, \mathfrak{p}) = 1$. Hence

$$S_{p,\mathfrak{p}^\lambda} = \sum_{h=0}^{\mathfrak{p}^\lambda - 1} e\left(\frac{p h^k}{\mathfrak{p}^\lambda}\right) = \sum_{h'=0}^{\mathfrak{p}^{\lambda-\theta-1}-1} e\left(\frac{p h'^k}{\mathfrak{p}^\lambda}\right) \sum_{z=0}^{\mathfrak{p}^{\theta+1}-1} e\left(\frac{p z P h'^{k-1}}{\mathfrak{p}}\right).$$

The inner sum vanishes unless $h' = \mathfrak{p} h_1$, when it is $\mathfrak{p}^{\theta+1}$. Hence

$$S_{p,\mathfrak{p}^\lambda} = \mathfrak{p}^{\theta+1} \sum_{h_1=0}^{\mathfrak{p}^{\lambda-\theta-2}-1} e\left(\frac{p h_1^k}{\mathfrak{p}^{\lambda-k}}\right) = \mathfrak{p}^{k-1} \sum_{h_1=0}^{\mathfrak{p}^{\lambda-k}-1} e\left(\frac{p h_1^k}{\mathfrak{p}^{\lambda-k}}\right) = \mathfrak{p}^{k-1} S_{p,\mathfrak{p}^{\lambda-k}},$$

and

$$\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}^\lambda}}{\mathfrak{p}^\lambda}\right| = (\mathfrak{p}^k)^{-\alpha}\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}^{\lambda-k}}}{\mathfrak{p}^{\lambda-k}}\right| = (\mathfrak{p}^{\alpha k})^{-\alpha}\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}^\mu}}{\mathfrak{p}^\mu}\right|. \tag{3.46}$$

This equation naturally holds also when $\lambda \leqq k$, with $\alpha = 0$, $\lambda = \mu$. From (3.46) we deduce

$$\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right| = \Pi\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}^\lambda}}{\mathfrak{p}^\lambda}\right| = q^{-\alpha}\Pi\left|\frac{S_{p,\mathfrak{p}^\mu}}{\mathfrak{p}^{(1-\alpha)\mu}}\right| < B q^{-\alpha}, \tag{3.47}$$

since the last product has at most B factors, all less than B. This disposes of case (ii), and completes the proof of the lemma.

3.5. **Lemma 4.** *If $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ is a set of C primes, and Q is a number formed from these primes only, then*

$$\sum_{Q > \xi} Q^{-c} < C\xi^{-c} \qquad (\xi > 1). \tag{3.51}$$

For

$$\sum_{Q>\xi} Q^{-c} < \xi^{-\frac{1}{2}c} \sum_{Q>0} Q^{-\frac{1}{2}c} < \xi^{-\frac{1}{2}c} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_r \geqq 0} (\mathfrak{p}_1^{l_1} \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r})^{-\frac{1}{2}c} < C\xi^{-\frac{1}{2}c}.$$

---

[21]) P. N. 4, 175.

[22]) P. N. 4, 166, Lemma 1.

3.6. **Lemma 5** [23]. *The series* $\Sigma \mathfrak{A}_q(m)$ *is absolutely convergent for* $m > 0$, $s \geqq k+1$. *Also*

$$\sum_{q>\nu} |\mathfrak{A}_q(m)| < C\nu^{-c}(d(m))^3 \qquad (s \geqq k+1), \tag{3.61}$$

$$|\mathfrak{S}_2(m)| < C\nu^{-c}(d(m))^3 \qquad (s \geqq k+1), \tag{3.62}$$

$$|\mathfrak{S}_2(m)| < C\nu^{2-sa} \qquad (s \geqq 2k+1). \tag{3.63}$$

The last result is easily proved, for, by (3.42),

$$|\mathfrak{S}_2(m)| < C \sum_{q>\nu} |\mathfrak{A}_q(m)| < C \sum_{q>\nu} q^{1-sa} < C\nu^{2-sa}$$

since $1 - sa < -1$ if $s > 2k$).

The proof of (3.61), of which (3.62) is an obvious corollary, is much more elaborate. We write

$$q = q'Q = q_1 q_2 Q \tag{3.64}$$

where now q' is the product of all odd factors of q which are prime to k, and q_1 is the product of the primes which divide q' once only [24]); so that

$$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_{q_1}\mathfrak{A}_{q_2}\mathfrak{A}_Q. \tag{3.65}$$

In each term of (3.61), one at least of q_1, q_2, Q exceeds $\nu^{\frac{1}{3}}$; and if Σ_1, Σ_2, Σ_3 are the sums of the terms in which (i) $q_1 > \nu^{\frac{1}{3}}$, (ii) $q_2 > \nu^{\frac{1}{3}}$, and (iii) $Q > \nu^{\frac{1}{3}}$, then

$$\sum_{q>\nu} |\mathfrak{A}_q(m)| \leqq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \tag{3.66}$$

3.7. We write $q_1 = \Pi \mathfrak{p}_1$, $q_2 = \Pi \mathfrak{p}_2^{\lambda}$; and we make three preliminary observations. First

$$|\mathfrak{A}_q| < Cq^{-c} < C \tag{3.71}$$

for all q and m, by (3.12), and in particular when q is q_1, q_2, or Q. Next [25])

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}_2^{\lambda}}(m) = 0$$

unless $\mathfrak{p}_2^{\lambda-1} | m$, and *a fortiori* unless $\mathfrak{p}_2^{\lambda} | m^2$; so that $\mathfrak{A}_{q_2}(m) = 0$ unless $q_2 | m^2$. From this last remark it follows that not more than $d(m^2)$, and therefore not more than $(d(m))^2$, different values of q_2 can occur in non-zero terms of (3.61). Finally

$$|\mathfrak{A}_{q_1}| = \Pi |\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}_1}| < \Pi(C\mathfrak{p}_1^{1-\frac{1}{2}s}) \leqq \Pi(C\mathfrak{p}_1^{-1}) < C\Pi\mathfrak{p}_1^{-\frac{1}{2}} = Cq_1^{-\frac{1}{2}},$$

---

[23]) Compare P. N. 5, 52, Lemma 6.

[24]) Thus, if $k = 15$ and $q = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$, $q_1 = 11$, $q_2 = 7^2$, $Q = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

[25]) P. N. 2, 20; P. N. 4, 170.

by (3.11). Hence, if $\xi > 0$, we have $|\mathfrak{A}_{q_1}| < Cq_1^{-\frac{1}{8}}|\mathfrak{A}_{q_1}|^{\frac{3}{4}}$ and

$$(3.72)\quad \sum_{q_1>\xi}|\mathfrak{A}_{q_1}| < C\xi^{-\frac{1}{8}}\sum_{q_1>0}|\mathfrak{A}_{q_1}|^{\frac{3}{4}} < C\xi^{-\frac{1}{8}}\prod_{p}(1+|\mathfrak{A}_p|^{\frac{3}{4}})$$

$$< C\xi^{-\frac{1}{8}}\prod_{p\nmid m}(1+Cp^{-\frac{3}{8}})\prod_{p\mid m}(1+Cp^{-\frac{3}{4}}) < C\xi^{-\frac{1}{8}}\prod_{p<C}C\prod_{p\mid m}2$$

$$< C\xi^{-c}d(m).$$

In particular, taking $\xi = \frac{1}{2}$, we have

$$(3.721)\qquad \sum_{q_1>0}|\mathfrak{A}_{q_1}| < Cd(m).$$

We can now write down upper bounds for Σ_1, Σ_2 and Σ_3. Consider first Σ_1. Associated with a given q_1, we have at most $(d(m))^2$ values of q_2; and $|\mathfrak{A}_{q_2}| < C$, $|\mathfrak{A}_Q| < CQ^{-c}$. Hence the sum of these terms of Σ_1 is less than

$$C(d(m))^2|\mathfrak{A}_{q_1}|\sum_{Q}Q^{-c} < C(d(m))^2|\mathfrak{A}_{q_1}|,$$

by (3.51); and

$$(3.73)\qquad \Sigma_1 < C(d(m))^2\sum_{q_1>\nu^{\frac{1}{8}}}|\mathfrak{A}_{q_1}| < C\nu^{-c}(d(m))^3,$$

by (3.72).

The discussion of Σ_2 is similar, but we use the inequality $|\mathfrak{A}_{q_2}| < Cq_2^{-c}$. We plainly obtain

$$(3.74)\qquad \Sigma_2 < C\nu^{-c}(d(m))^2\sum_{q_1>0}|\mathfrak{A}_{q_1}| < C\nu^{-c}(d(m))^3,$$

by (3.721). Finally, the discussion of Σ_3 depends on the inequalities used for Σ_1. We have

$$(3.75)\quad \Sigma_3 < C(d(m))^2\sum_{q_1>0}|\mathfrak{A}_{q_1}|\sum_{Q>\nu^{\frac{1}{8}}}Q^{-c}$$

$$< C(d(m))^3\sum_{Q>\nu^{\frac{1}{8}}}Q^{-c} < C\nu^{-c}(d(m))^3,$$

by (3.51).

It is clear that (3.61) is a consequence of (3.66) and (3.73)—(3.75).

4. The behaviour of $f(x)$ on a major arc $\mathfrak{M}_1$.

4.1. Our object in this section is to prove

Lemma 6. *On a major arc* $\mathfrak{M}_1$

$$(4.11)\qquad |f-\varphi_{p,q}| < B_{\varepsilon,\delta}q^{\varkappa+\varepsilon},$$

so that

$$(4.12)\qquad |f-\varphi_{p,q}| < B_\varepsilon q^{\varkappa+\varepsilon}$$

if δ *is chosen appropriately as a function of* k *and* ε.

This lemma may be deduced from the analysis of P. N. 1, §§ 8. 1—8. 2. very $\mathfrak{M}_1$ is part of an $\mathfrak{M}$ (since $a_1 < a$ and $1 - a_1 > 1 - a$), so that e formulae there given may be used. The sums there called Φ_2 and Φ_3 e of the form required, and it is a question only of the magnitude Φ_1. In this sum we have now

$$\cos^2\psi \geqslant B q^2 n^{-2a_1},^{26})$$

$$q^{-1-b} n^b (\cos\psi)^{1+b} > B q^{-1-b} n^b (q n^{-a_1})^{1+b} = B n^{(1+b)\delta} > B n^{\delta},$$

$$|E| < B e^{-Bm^{1+b} n^{\delta}}.$$

follows at once that Φ_1 is also of the form required, and indeed extre- ely small.

If this course were adopted, Lemmas 7—11, which are required only r the proof of Lemma 6, would become unnecessary, and our analysis ould be appreciably shortened.

The objection to this procedure is that it involves the reinstatement f the whole of the analysis of §§ 7—8 of P. N. 1, which is eliminated ntirely in Landau's version of the proof. If we are to preserve the mplifications introduced by Landau and Weyl, an independent proof f Lemma 6 is essential.

4. 2. **Lemma 7.** *If*

4. 21) $$0 \leqq \mu \leqq q, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

hen

4. 22) $$|U_{\mu,m}| = \Big|\sum_{h=0}^{\mu} h^m e_q(p h^k)\Big| < B_\varepsilon q^{m+\varkappa+\varepsilon}.$$

We have[27])

$$|U_{\mu,0}|^K < B_\varepsilon \mu^\varepsilon q^\varepsilon \left(\mu^{K-1} + \frac{\mu^K}{q} + q\mu^{K-k}\right) < B_\varepsilon q^{K-1+\varepsilon},$$

hich proves the lemma when $m = 0$. And in general

$$|U_{\mu,m}| \leqq q^m \max_{0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq q} \Big|\sum_{h=\mu_1}^{\mu_2} e_q(p h^k)\Big| < B_\varepsilon q^{m+\varkappa+\varepsilon}.$$

Lemma 8. *Suppose that* $0 \leqq h < q$,

4. 23) $$x = e^{-y}, \quad Y = q^k y, \quad t = \frac{h}{q}, \quad V = e^{-Y(v+t)^k}(v+t)^{k-1},$$

4. 24) $$f_h = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(mq+h)^k y} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_m y};$$

---

[26]) We use for the moment the notation of P. N. 1, except naturally that, in onformity with the conventions laid down in § 1. 1, we write B instead of A.

[27]) Landau, l. c. 226 (Hilfssatz 2).

and that $P(v)$, $P_1(v)$, $P_2(v)$, ... *are polynomials in* $(v)=v-[v]$, *defined successively by*

$$\overline{P}(v)=v+1-(v)=v+P(v)=c_0v+P(v), \tag{4.251}$$

$$\overline{P}_1(v)=\int_0^v P(w)\,dw=c_1v+P_1(v), \tag{4.252}$$

$$\overline{P}_2(v)=\int_0^v P_1(w)\,dw=c_2v+P_2(v), \quad \ldots, \tag{4.253}$$

so that $P(v)=1-(v)$, $P_1(v)=\frac{1}{2}(v)-\frac{1}{2}(v)^2$, $c_0=1$, $c_1=\frac{1}{2}$, *and in general* c_ν *is a function of* ν *only. Then*

$$\frac{f_h}{kY}=\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu c_\mu\int_0^\infty vV^{(\mu)}\,dv+(-1)^\nu\int_0^\infty P_\nu(v)V^{(\nu)}\,dv \tag{4.26}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu c_\mu I_\mu+J_\nu.$$

This lemma merely embodies the definition of certain symbols, and the results of certain formal transformations required for the proof of Lemma 6.

If we define $N(x)$ by

$$N(x)=m+1 \qquad (\lambda_m\leqq x<\lambda_{m+1}),$$

we have

$$f_h=\sum_0^\infty e^{-\lambda_m y}=y\int_{\lambda_0}^\infty N(u)e^{-uy}\,du.$$

Writing $u=(vq+h)^k=q^k(v+t)^k$, and observing that $N(u)=\overline{P}(v)$, we obtain

$$f_h=kY\int_0^\infty\overline{P}(v)V\,dv=kY\int_0^\infty vV\,dv+kY\int_0^\infty\overline{P}_1'(v)V\,dv$$

$$=kY\int_0^\infty vV\,dv-c_1kY\int_0^\infty vV'\,dv-kY\int_0^\infty P_1(v)V'\,dv.$$

This is (4.26) with $\nu=1$, and it is plain that the general formula follows from a repetition of the argument.

Lemma 9. *If*

$$\mathsf{H}=\mathfrak{R}(Y)=\mathfrak{R}(q^k y)=\frac{q^k}{n}, \tag{4.27}$$

then

$$|Y|<\frac{|Y|}{\mathsf{H}^{1-\sigma}}<An^{-\delta} \tag{4.28}$$

on $\mathfrak{M}_1$.

For $\mathsf{H} \leqq n^{\alpha_1 k-1} < 1$ and

$$\frac{|Y|}{\mathsf{H}^{1-\alpha}} = q n^{1-\alpha} |y| < A n^{\alpha_1-\alpha} = A n^{-\delta}.$$

4.3. **Lemma 10.** *We can choose* $\nu_0 = \nu_0(k, \delta)$ *so that*

4.31) $$|kYJ_\nu| = \left| kY \int_0^\infty P_\nu V^{(\nu)} dv \right| < \frac{B_\delta}{n}$$

or $\nu = \nu_0$.

Since $|kY| < Ak < B$, we may ignore the outside factor. We take $= \nu_1 k$, where $\nu_1 > 2$.

We write

$$V^{(\nu)} = e^{-Y(v+t)^k} \sum_{l,m} c_{k,l,m} Y^l (v+t)^m.$$

Every differentiation of the exponential factor of V introduces a factor Y, nd a term in Y^l can be generated only by l such differentiations together vith $\nu - l$ which do not bear upon the exponential. Hence the term in Y^l is a multiple of

$$\left(\frac{d}{dv}\right)^{\nu-l} [(-kY)^l (v+t)^{(k-1)(l+1)}],$$

nd is zero unless $(k-1)(l+1) \geqq \nu - l$ or

$$l \geqq \frac{\nu-k+1}{k} > \nu_1 - 1.$$

That is to say, ν_1 is the least possible value of l. Associated with a given l we may have values of m from 0 to $(k-1)(l+1)$.

It follows that

$$|V^{(\nu)}| < B_\nu e^{-\mathsf{H}(v+t)^k} \sum_{l=\nu_1}^{\nu} |Y|^l (1 + |v+t|^{(k-1)(l+1)}),$$

nd so

$$\left| \int_0^\infty P_\nu V^{(\nu)} dv \right| < B_\nu \sum_{l=\nu_1}^{\nu} |Y|^l \int_0^\infty e^{-\mathsf{H}(v+t)^k} (1 + |v+t|^{(k-1)(l+1)}) dv$$

$$< B_\nu \sum_{l=\nu_1}^{\nu} |Y|^l (\mathsf{H}^{-\alpha} + \mathsf{H}^{-(l+1)(1-\alpha)-\alpha})$$

$$< B_\nu \mathsf{H}^{-\alpha} \sum_{l=\nu_1}^{\nu} |Y|^l + \frac{B_\nu}{\mathsf{H}} \sum_{l=\nu_1}^{\nu} \left(\frac{|Y|}{\mathsf{H}^{1-\alpha}} \right)^l$$

$$< B_{\nu,\delta} \mathsf{H}^{-1} n^{-\nu_1 \delta} < B_{\nu,\delta} n^{1-\nu_1\delta} < \frac{B_\delta}{n}$$

by (4.28)), if $\nu_1 = \nu_{1,0}(k, \delta)$, i. e. if $\nu = \nu_0(k, \delta)$.

It should be observed that we can always replace $\nu_0(k, \delta)$ by a larger number of the same type.

4.4. We understand by $Q(Y, t)$ a polynomial in Y and t, whose degree in either variable has an upper bound of the type B_δ and whose coefficients have upper bounds of the same type. Since $|Y| < A$, $0 \leqq t < 1$, we have always $|Q(Y, t)| < B_\delta$. And we understand by R a number whose absolute value is less than $\frac{B_\delta}{n}$.

Lemma 11. *We can choose $\nu_0 = \nu_0(k, \delta)$ so that, in addition to* (4.31), *we have*

$$kYI_\mu = kY\int_0^\infty vV^{(\mu)}\,dv = Q(Y, t) + R \tag{4.41}$$

for $1 \leqq \mu \leqq \nu = \nu_0$, *and*

$$kYI_0 = kY\int_0^\infty vV\,dv = \Gamma(1+a)\,Y^{-a} + Q(Y, t) + R. \tag{4.42}$$

We have

$$e^{-Yt^k} = \sum_{m=0}^{m_1} \frac{(-Yt^k)^m}{m!} + r,$$

where

$$|r| < A|Y|^{m_1} < A(An^{-\delta})^{m_1} < \frac{B_\delta}{n},$$

if $m_1 = m_1(k, \delta)$ is sufficiently large; and so

$$e^{-Yt^k} = Q(Y, t) + R.$$

If $\mu > 1$

$$kYI_\mu = kY\int_0^\infty vV^{(\mu)}\,dv = kYV^{(\mu-2)}(0) = kYe^{-Yt^k}Q(Y, t)$$
$$= kYQ(Y, t)\,(Q(Y, t) + R) = Q(Y, t) + R;$$

while if $\mu = 1$

$$kYI_1 = kY\int_0^\infty vV'\,dv = -kY\int_0^\infty V\,dv = e^{-Yt^k} = Q(Y, t) + R.$$

Finally, if $\mu = 0$,

$$kYI_0 = kY\int_0^\infty v(v+t)^{k-1}e^{-Y(v+t)^k}\,dv$$
$$= \int_0^\infty e^{-Y(v+t)^k}\,dv = \int_t^\infty e^{-Yw^k}\,dw = \Gamma(1+a)\,Y^{-a} - \int_0^t e^{-Yw^k}\,dw$$
$$= \Gamma(1+a)\,Y^{-a} - \int_0^t (Q(Y, w) + R)\,dw$$
$$= \Gamma(1+a)\,Y^{-a} + Q(Y, t) + R.$$

4.5. We can now prove Lemma 6. We have

$$f = -1 + 2\sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_m y} = -1 + 2\sum_h e_q(ph^k) f_h. \tag{4.51}$$

follows from (4.26), (4.31), (4.41) and (4.42) that

$$f_h = \Gamma(1+a)\, Y^{-a} + Q(Y,t) + R \tag{4.52}$$

hen $\nu = \nu_0$. Combining this with (4.51), we find

$$f = 2\,\Gamma(1+a)\, S_{p,q}\, Y^{-a} + \varrho = \varphi_{p,q} + \varrho, \tag{4.53}$$

here

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3, \quad \varrho_1 = -1, \quad \varrho_2 = \sum_h e_q(ph^k) R, \tag{4.541}$$

$$\varrho_3 = \sum_h e_q(ph^k)\, Q\left(Y, \frac{h}{q}\right). \tag{4.542}$$

ow

$$|\varrho_2| \leqq \sum_h |R| < B_\delta \frac{q}{n} < B_\delta. \tag{4.55}$$

urther,

$$Q\left(Y, \frac{h}{q}\right) = \sum_{l,m} c_{k,l,m}\, Y^l \left(\frac{h}{q}\right)^m,$$

here l, m, and the coefficients have upper bounds B_δ. And

$$|\varrho_3| = \left|\sum_h e_q(ph^k) \sum_{l,m} c_{k,l,m}\, Y^l \left(\frac{h}{q}\right)^m\right| \tag{4.56}$$

$$= \left|\sum_{l,m} c_{k,l,m}\, Y^l q^{-m} \sum_h h^m e_q(ph^k)\right| < B_{\varepsilon,\delta}\, q^{\varkappa+\varepsilon},$$

y Lemma 7. Lemma 6 follows from (4.53) to (4.56).

5. Further lemmas preliminary to the proof of Theorems 1—4.

5.1. **Lemma 12.** *If* $|z| < 1$ *and*

$$-\pi + C < \Im \log z = \arg z < \pi - C$$

hen

$$|g(z)| < C\,|\arg z|^{-sa}, \tag{5.11}$$

$$\left|g(z) - \Gamma(sa)\left(\log \frac{1}{z}\right)^{-sa}\right| < C. \tag{5.12}$$

These are known results.

Lemma 13. *We have*

$$\sum_z \int |F_{p,q} - \varphi_{p,q}^s|^2\, |d\theta| < C. \tag{5.13}$$

This is trivial; for, if $z = x e_q(-p) = e^{-v}$, we have $y = \log \frac{1}{z}$ and

$$|F_{p,q} - \varphi^s_{p,q}| = \left| \mathfrak{C}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s \{g(x e_q(-p)) - \Gamma(sa) y^{-sa}\} \right| < C,$$

by Lemma 12.

Lemma 14. *We have*

$$\sum \int_{\mathfrak{M}_1} |d\theta| < A n^{2a_1 - 1} < A n^{2a-1}. \tag{5.14}$$

For the sum is less than

$$A \sum_{q \leqq n^{a_1}} \sum_{p} \frac{1}{q n^{1-a_1}} < A n^{a_1 - 1} \sum_{q \leqq n^{a_1}} 1 < A n^{2a_1 - 1}.$$

Lemma 15. *If* $s \geqq k+1$, $\nu > 1$, *then*

$$\sum_{q > \nu} \sum_{p} \int_{\xi_{p,q}} |\varphi_{p,q}|^{2s} |d\theta| < C \nu^{2-2sa} n^{2sa-1}. \tag{5.15}$$

For

$$\int_{\xi} |\varphi|^{2s} |d\theta| = C \left| \frac{S_{p,q}}{q} \right|^{2s} \int_{\xi} |y|^{-2sa} |d\theta|,$$

and

$$\int_{\xi} |y|^{-2sa} |d\theta| < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\left(\frac{1}{n^2} + \theta^2\right)^{sa}} = n^{2sa-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{sa}} < n^{2sa-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} < A n^{2sa-1}.$$

Hence, by Lemma 3,

$$\sum_{q > \nu} \sum_{p} \int_{\xi} |\varphi|^{2s} |d\theta| < C n^{2sa-1} \sum_{q > \nu} q^{1-2sa} < C \nu^{2-2sa} n^{2sa-1}.$$

Lemma 16. *If* $\nu = n^{\beta}$, *where* $\beta = \beta(k, s) > 0$,[27] *then*

$$\int_0^{2\pi} |F_2|^2 d\psi < C n^{2sa-1-c} \tag{5.16}$$

if $s \geqq k+1$; *and*

$$\int_0^{2\pi} |F_2|^2 d\psi < C n^{2sa-1-\lambda_1}, \tag{5.17}$$

where

$$\lambda_1 = 2\beta(sa-2), \tag{5.18}$$

if $s \geqq 2k+1$.

---

[27]) β is ultimately chosen in three different ways to suit three different arguments. In each case it is chosen as a function of k and s only. We anticipate this choice and allow ourselves to treat β as a c.

(i) The integral is

$$\pi \sum (\mathfrak{S}_2(m))^2 m^{2sa-2} |x|^{2m} < C n^{-c} \sum m^{2sa-2} (d(m))^6 |x|^{2m}$$
$$< C_\varepsilon n^{-c} \sum m^{2sa-2+\varepsilon} |x|^{2m} < C_\varepsilon n^{2sa-1-c+\varepsilon},$$

y Lemma 5 (3.62). The inequality (5.16) follows if we take ε to be alf the c which precedes it, and then replace c by $2c$.

(ii) If $s \geqq 2k+1$, the integral is also less than

$$C\nu^{4-2sa} \sum m^{2sa-2} |x|^{2m} < C\nu^{4-2sa} n^{2sa-1} < C n^{2sa-1-\lambda_1},$$

y Lemma 5 (3.63).

5.2. Our next lemma, which concerns the value of $F_{P,Q}$ when x es on an arc $\xi_{p,q}$, requires a word of preliminary explanation. The nction $F_{P,Q}$ and the arc $\xi_{P,Q}$ are invariant if P is altered by a multiple Q, and we obtain the complete set of arcs $\xi_{P,Q}$, for a given Q, if P ns through any complete set of residues prime to Q. In what follows, q, Q being fixed, we select for our set of residues that for which

$$Q\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2}\right) \leqq P < Q\left(\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\right)$$

and of course $P = 0$ if $Q = 1$). From this it follows that

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P}{Q}\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

Lemma 17[28]). *Suppose that x lies on $\xi_{p,q}$ and that $\xi_{P,Q}$ is a Farey rc other than $\xi_{p,q}$. Then*

.21) $$|F_{P,Q}| < C N_1^{sa} |pQ - qP|^{-sa}.$$

We have

.22) $$x = |x| e^{i\psi} = |x| e_q(p) e^{-i\theta} = |x| e_Q(P) e^{-i\omega},$$

here

.221) $$\omega = 2\pi\left(\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}\right) + \theta,$$

that $|\omega| \leqq \pi + |\theta| < \frac{3}{2}\pi$ if $N_1 \geqq 4$. Hence

.23) $$|F_{P,Q}| = \left|\mathfrak{C}\left(\frac{S_{P,Q}}{Q}\right)^s g(|x| e^{-i\omega})\right| < C Q^{-sa} |\omega|^{-sa},$$

y Lemma 12 (5.11) and Lemma 3 (3.41).

If p, q, and P, Q do not correspond to arcs adjacent in the dissection en

$$\left|2\pi\left(\frac{p}{q} - \frac{P}{Q}\right)\right| \geqq \frac{4\pi}{qQ} \geqq 2\,\frac{2\pi}{q N_1} \geqq 2|\theta|,$$

[28]) Compare P. N. 5, 52 (Lemma 10).

and so

$$|\omega| > A\left|\frac{p}{q} - \frac{P}{Q}\right| = \frac{A}{qQ}|pQ - qP|. \tag{5.24}$$

As $q \leqq N_1$, (5.21) follows from (5.23) and (5.24).

This argument fails when the arcs are adjacent. In this case $|pQ - qP| = 1$. As x is not on $\xi_{P,Q}$,

$$|\omega| > \frac{A}{QN_1} = \frac{A}{QN_1}|pQ - qP|,$$

so that the conclusion still follows.

Lemma 18[29]. *If*

$$G = \overline{\Sigma}|F_{P,Q}|, \tag{5.25}$$

where the sign $\overline{\Sigma}$ implies summation over those pairs (P, Q), distinct from (p, q), for which $Q \leqq \nu = n^\beta$, and $s \geqq k+1$, then

$$\sum_{\xi_{p,q}} \int G^2 |d\theta| < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon+l}, \tag{5.26}$$

where

$$\lambda_3 = a(2sa-1) - 4\beta, \tag{5.261}$$

and $l = l(k, s, \delta)$ tends to zero with δ; so that

$$\sum_{\xi_{p,q}} \int G^2 |d\theta| < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon} \tag{5.27}$$

if $\delta = \delta(k, s, \varepsilon)$ is sufficiently small.

Since G is a sum of less than ν^2 terms, we have

$$G^2 < \nu^2 \overline{\Sigma}|F_{P,Q}|^2 < C\nu^2 N_1^{2sa} \overline{\Sigma}|pQ - qP|^{-2sa}$$

by Lemma 17. Hence

$$\sum_{\xi_{p,q}} \int G^2 |d\theta| \leqq C\nu^2 N_1^{2sa-1} \sum_{p,q} \frac{1}{q} \overline{\sum_{P,Q}} |pQ - qP|^{-2sa}$$

$$\leqq C\nu^2 N_1^{2sa-1} \sum_{P,Q} \sum_{p,q} \frac{1}{q} |pQ - qP|^{-2sa},$$

where now the inner summation is defined by $q \leqq N_1$, $pQ - qP \neq 0$, and the outer summation by $Q \leqq \nu$. But, if $Pq \equiv h \pmod{Q}$, where $0 \leqq h < Q$, we have

$$\sum_p |pQ - qP|^{-2sa} < \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |mQ + h|^{-2sa}\ ^{30}) < 2 + 2Q^{-2sa} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2sa} < A,$$

---

[29]) Compare P. N. 5, 52 (Lemma 11).

[30]) The dash denoting that any term for which $mQ + h = 0$ is to be omitted.

nd so

$$\text{5.28)}\quad \sum\int_{\xi} G^2\,|d\theta| < C\nu^2 N_1^{2sa-1}\sum_{P,Q}\sum_{q}\frac{1}{q} < C\nu^4 N_1^{2sa-1}\log(N_1+2)$$
$$< C n^{(2sa-1)(1-a_1)+4\beta}\log n < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon+l},$$

here $l=(2sa-1)\delta$. This proves (5.26). To prove (5.27), we choose δ o that $l<\varepsilon$, and then replace 2ε by ε.

5.3. **Lemma 19.** *If* $s\geqq k+1$, $\nu=n^\beta$, *and* $\beta<a_1$,

hen

$$\text{5.31)}\quad \sum\int_{\mathfrak{M}_1}|F_1-\varphi^s|^2\,|d\theta| < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon+l} < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon},$$

$$\text{5.32)}\quad \sum\int_{\mathfrak{m}_1}|F_1|^2\,|d\theta| < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon+l} < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon}.$$

Here

$$\text{5.33)}\qquad \lambda_3=\mathrm{Min}(2\beta(sa-1),\lambda_2)\geqq\mathrm{Min}(\lambda_1,\lambda_2),$$

$_1$ *and* λ_2 *being defined by* (5.18) *and* (5.261); $l=l(k,s,\delta)$ *tends to ero with* δ; *and the second inequality is in each case secured by an ppropriate choice of* δ.

(i) We have

$$F_1=F_{p,q}+\overline{\sum}F_{P,Q},$$

$$\text{5.341)}\qquad |F_1-\varphi^s|^2\leqq 2|F_{p,q}-\varphi^s|^2+2G^2,$$

f $q\leqq\nu$, and

$$F_1=\overline{\sum}F_{P,Q},$$

$$\text{5.342)}\qquad |F_1-\varphi^s|^2\leqq 2|\varphi|^{2s}+2G^2,$$

f $q>\nu$. Hence

$$\text{5.35)}\qquad \sum\int_{\mathfrak{M}_1}|F_1-\varphi^s|^2\,|d\theta|$$
$$\leqq 2\sum_{q\leqq\nu}\int_{\mathfrak{M}_1}|F_{p,q}-\varphi^s|^2\,|d\theta|+2\sum_{q>\nu}\int_{\mathfrak{M}_1}|\varphi|^{2s}\,|d\theta|+2\sum\int_{\mathfrak{M}_1}G^2\,|d\theta|$$
$$\leqq 2\sum\int_{\xi}|F_{p,q}-\varphi^s|^2\,|d\theta|+2\sum_{q>\nu}\int_{\xi}|\varphi|^{2s}\,|d\theta|+2\sum\int_{\xi}G^2\,|d\theta|$$
$$< C+Cn^{2sa-1-2\beta(sa-1)}+C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon+l},$$

by Lemmas 13, 15 and 18. As $\lambda_1<2\beta(sa-1)$ and $\lambda_3\leqq\lambda_2<2sa-1$, 5.31) follows.

(ii) The proof of (5.32) is similar, but rather simpler. Since $\beta<a_1$, $q>\nu$ on every $\mathfrak{m}_1$. Hence

$$\text{5.36)}\qquad \sum\int_{\mathfrak{m}_1}|F_1|^2\,|d\theta|\leqq 2\sum_{q>\nu}\int_{\xi}|\varphi|^{2s}\,|d\theta|+2\sum_{q>\nu}\int_{\xi}G^2\,|d\theta|,$$

nd the conclusion follows as before.

5.4. **Lemma 20.** *If* $s \geqq 2$

$$s_0 = s_0(k) = \left(\frac{1}{2}k - 1\right)K + 2, \tag{5.41}$$

and

$$\lambda_4 = \frac{2a}{K}(s - s_0), \tag{5.42}$$

then

$$\sum \int_{\mathfrak{m}_1} |f|^{2s} |d\theta| < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_4+\varepsilon+l} < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_4+\varepsilon}, \tag{5.43}$$

the meaning of l *and of the double inequality being the same as before.*

It is known[31]) that

$$|f| < B_\varepsilon n^{a-\frac{a_1}{K}+\varepsilon}$$

on $\mathfrak{m}_1$. Hence

$$\sum \int_{\mathfrak{m}_1} |f|^{2s} |d\theta| < C_\varepsilon n^{(2s-4)\left(a-\frac{a_1}{K}\right)+\varepsilon} \sum \int_{\mathfrak{m}_1} |f|^4 |d\theta|$$

$$< C_\varepsilon n^{(2s-4)\left(a-\frac{a_1}{K}\right)+2a+\varepsilon}.$$[32])

But

$$(2s-4)\left(a-\frac{a_1}{K}\right)+2a = 2sa-1-\mu,$$

where

$$\mu = \frac{2a}{K}\left(s - \frac{1}{2}kK + K - 2\right) - \frac{(2s-4)\delta}{K} = \lambda_4 - l,$$

which proves the lemma.

5.5. **Lemma 21.** (i) *If* $s \geqq 2k+1$ *then*

$$\sum \int_{\mathfrak{M}_1} |f^s - \varphi^s|^2 |d\theta| < C_{\varepsilon,\delta} n^{2sa-1-\lambda_6+\varepsilon} < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_6+\varepsilon}, \tag{5.51}$$

where

$$\lambda_6 = \mathrm{Min}(\lambda_4, \lambda_5) = \mathrm{Min}(\lambda_4, 2a), \tag{5.511}$$

and the second inequality is secured by choice of δ.

(ii) *If* $s \geqq k+1$ *then*

$$\sum \int_{\mathfrak{M}_1} |f^s - \varphi^s|^2 |d\theta| < C_{\varepsilon,\delta} n^{2sa-1-\lambda_6'+\varepsilon} < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_6'+\varepsilon}, \tag{5.52}$$

where

$$\lambda_6' = \mathrm{Min}(\lambda_4, \lambda_5') = \mathrm{Min}\left(\lambda_4, \frac{2a}{K}\right), \tag{5.521}$$

and the second inequality is secured by choice of δ.

---

[31]) Landau, l. c. 230 (Hilfssatz 4).

[32]) See P. N. 2, 16—17; Landau, l. c. 241.

We have

$$|f^s-\varphi^s|^2 \leqq A_s|f-\varphi|^{2s}+A_s|f-\varphi|^2|\varphi|^{2s-2},$$

5.53) $$\sum\int_{\mathfrak{M}_1}|f^s-\varphi^s|^2|d\theta| \leqq A_s\sum\int_{\mathfrak{M}_1}|f-\varphi|^{2s}|d\theta| + A_s\sum\int_{\mathfrak{M}_1}|f-\varphi|^2|\varphi|^{2s-2}|d\theta| = A_s\varrho_1+A_s\varrho_2,$$

ay. Now

$$|f-\varphi| < B_{\varepsilon,\delta}q^{\varkappa+\varepsilon} < B_{\varepsilon,\delta}n^{a_1(\varkappa+\varepsilon)} < B_{\varepsilon,\delta}n^{a(\varkappa+\varepsilon)}$$

y Lemma 6, and so

$$\varrho_1 < C_{\varepsilon,\delta}n^{2sa\varkappa+\varepsilon}\sum\int_{\mathfrak{M}_1}|d\theta| < C_{\varepsilon,\delta}n^{2sa\varkappa+2a-1+\varepsilon},$$

y Lemma 14. Now

$$2sa\varkappa+2a-1 \leqq 2sa-1-\lambda_4 = 2sa\varkappa-4a\varkappa+2a$$

$4a\varkappa \leqq 1$, which is true (with inequality except when $k=3$). Hence

5.54) $$\varrho_1 < C_{\varepsilon,\delta}n^{2sa-1-\lambda_4+\varepsilon}.$$

Again, using Lemma 6 once more, we have

$$\varrho_2 < \sum\int_{\mathfrak{M}_1}B_{\varepsilon,\delta}q^{2\varkappa+\varepsilon}.C\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right|^{2s-2}|y|^{-2a(s-1)}.|d\theta|.$$

Now

$$\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right| < Bq^{-a}$$

y Lemma 3, and

$$\int_{\mathfrak{M}_1}|y|^{-2a(s-1)}|d\theta| < An^{2a(s-1)-1}$$

as in the proof of Lemma 15). Hence

5.55) $$\varrho_2 < C_{\varepsilon,\delta}n^{2a(s-1)-1}\sum_{q\leqq n^{a_1}}q^{2\varkappa+1-2a(s-1)+\varepsilon},$$

nd so also, replacing $q^{2\varkappa+\varepsilon}$ by its upper bound $n^{2a_1\varkappa+\varepsilon}$,

5.56) $$\varrho_2 < C_{\varepsilon,\delta}n^{2a(s-1)-1+2a_1\varkappa+\varepsilon}\sum_{q\leqq n^{a_1}}q^{1-2a(s-1)}.$$

In order to establish the complete lemma it is enough, after (5.54), o prove that

5.57) $$\varrho_2 < C_{\varepsilon,\delta}n^{2sa-1-2a+\varepsilon} \qquad (s\geqq 2k+1)$$

nd

5.58) $$\varrho_2 < C_{\varepsilon,\delta}n^{2sa-1-\frac{2a}{K}+\varepsilon} \qquad (s\geqq k+1).$$

Now $2\varkappa+1-2a(s-1) < 3-4ak = -1$ if $s\geqq 2k+1$, and then 5.57) follows from (5.55). Finally, we may replace a_1 by a in (5.56);

observing then that $1-2a(s-1) \leqq 1-2ak = -1$ when $s \geqq k+1$, (5.56) gives

$$\varrho_2 < C_{\varepsilon,\delta} n^{2as-\frac{2a}{K}+\varepsilon} \log n < C_{\varepsilon,\delta} n^{2as-\frac{2a}{K}+\varepsilon},$$

which is (5.58).

6. Proofs of Theorems 1—3.

6.1. **Proof of Theorem 1.** We have

$$1+\sum \sigma(m) x^m = (f(x))^s - F(x,k,s) = f^s - F,$$

$$1+\sum (\sigma(m))^2 |x|^{2m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^s - F|^2 d\psi;$$

and so

$$(6.11)\quad \sum_{m=1}^{n} (\sigma(m))^2 \leqq e^2 \sum_{m=1}^{n} (\sigma(m))^2 e^{-\frac{2m}{n}} < A\int_0^{2\pi} |f^s - F|^2 d\psi$$

$$\leqq A\Big(\sum \int_{\mathfrak{M}_1} |f^s - \varphi^s|^2 |d\theta| + \sum \int_{\mathfrak{M}_1} |F_1 - \varphi_s|^2 |d\theta|$$

$$+ \sum \int_{\mathfrak{m}_1} |f|^{2s} |d\theta| + \sum \int_{\mathfrak{m}_1} |F_1|^2 d\theta + \int_0^{2\pi} |F_2|^2 d\psi\Big)$$

$$= A(J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5),$$

say. Upper bounds for all these sums have been found in the preceding lemmas. Thus, when δ is chosen appropriately, we have

$$(6.121)\qquad J_1 < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_6+\varepsilon} \qquad (s \geqq 2k+1),$$

$$(6.122)\qquad J_1 < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_6'+\varepsilon} \qquad (s \geqq k+1),$$

by Lemma 21;

$$(6.13)\qquad J_2 < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon} \qquad (s \geqq k+1)$$

by Lemma 19 (5.31);

$$(6.14)\qquad J_3 < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_4+\varepsilon} \qquad (s \geqq 2)$$

by Lemma 20;

$$(6.15)\qquad J_4 < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda_3+\varepsilon} \qquad (s \geqq k+1),$$

by Lemma 19 (5.32); and

$$(6.161)\qquad J_5 < C n^{2sa-1-\lambda_1} \qquad (s \geqq 2k+1),$$

$$(6.162)\qquad J_5 < C n^{2sa-1-\gamma} \qquad (s \geqq k+1),$$

y Lemma 16, γ being the particular c which occurs in that lemma. ence, on the one hand,

$$\sum_{m=1}^{n}(\sigma(m))^2 < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda+\varepsilon} \qquad (s \geqq 2k+1), \tag{6.17}$$

here

$$\lambda = \operatorname{Min}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6) \geqq \operatorname{Min}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5), \tag{6.171}$$

$$\lambda_1 = 2\beta(sa-2), \quad \lambda_2 = a(2sa-1) - 4\beta, \quad \lambda_4 = \frac{2a}{K}(s-s_0), \quad \lambda_5 = 2a, \tag{6.172}$$

nd on the other

$$\sum_{m=1}^{n}(\sigma(m))^2 < C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda'+\varepsilon} \qquad (s \geqq k+1), \tag{6.18}$$

here

$$\lambda' = \operatorname{Min}(\gamma, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6') = \operatorname{Min}(\gamma, 2\beta(sa-1), \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5'), \tag{6.181}$$

$$\lambda_5' = \frac{2a}{K}. \tag{6.182}$$

The inequality (6.17) is much better than (6.18) when it is valid, hat is, when $s \geqq 2k+1$; and it is essential to the proof of Theorem 4. But (6.17) is not valid for $s > s_0$ when $k = 3$, since $s_0 = 4$, $2k+1 = 7$; nd we therefore use (6.18) in proving Theorem 1.

We note first that $s_0 \geqq k+1$; for if $k = 3$, $s_0 = 4$, and if $k > 3$, $_0 \geqq 2^{k-1} + 2 > k+1$. Hence (6.18) holds for $s > s_0$. Also

$$2\beta(sa-1) \geqq 2a\beta, \quad \lambda_2 = a(2sa-1) - 4\beta > a - 4\beta, \quad \lambda_4 \geqq \frac{2a}{K}.$$

f we take $\beta = \frac{1}{8}a$ (and suppose δ small enough to secure that $\beta < a_1$), he numbers on the right hand sides of these inequalities are $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{2a}{K}$. All these numbers are c's (indeed independent of s), and so is γ. Hence ve may write c for λ' in (6.18). If finally we chose ε appropriately as function of k and s, we obtain (1.22), and the proof of Theorem 1 s completed.

6.2. **Proof of Theorem 2.** If

$$s \geqq s_1 = \operatorname{Max}(\Gamma(k), 4) \tag{6.21}$$

hen, by Lemma 2,

$$\varrho(m) > C m^{sa-1}. \tag{6.22}$$

Now $(\frac{1}{2}k-1)K + 3 \geqq 4k \geqq \Gamma(k)$ except for $k = 3$ and $k = 4$, while $\frac{1}{2}k-1)K + 3 = 5 > 4 = \Gamma(k)$ for $k = 3$. Hence (6.22) is true in all ases considered in Theorem 2.

If $r(m)=0$, then $|\sigma(m)|=\varrho(m)>Cm^{s\alpha-1}$. If then $\mu(n)$ is the number of non-representable numbers between $\frac{1}{2}n$ (exclusive) and n (inclusive), we have

$$\sum_{\frac{1}{2}n}^{n}(\sigma(m))^2\geqq C\left(\frac{1}{2}n\right)^{2s\alpha-2}\mu(n)$$

and so

$$\mu(n)\leqq C2^{2s\alpha-2}n^{2-2s\alpha}\sum_{1}^{n}(\sigma(m))^2<Cn^{1-\alpha},$$

by (1.22). The total number of non-representable numbers less than n is therefore less than

$$Cn^{1-\alpha}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\ldots\right)<Cn^{1-\alpha}.$$

This proves Theorem 2.

6.3. **Proof of Theorem 3.** When $k=4$

$$\left(\frac{1}{2}k-1\right)K+3=11<16=\Gamma(k),$$

and the preceding argument fails. In this case the conclusion of Theorem 2 is false.

Suppose that

$$s=15,\quad t>0,\quad \frac{1}{2}n<m\leqq n,$$

and write

$$m=m'\qquad(16^t+m),\qquad m=m''\qquad(16^t\mid m).$$

Further, suppose that a zero suffix attached to a number implies that it is not representable by 15 biquadrates, and that $\mu(n)$, $\mu'(n)$, $\mu''(n)$ are the numbers of the classes m_0, m_0', m_0''.

We have[33])

$$\varrho(m')>A_t(m')^{\frac{11}{4}} \tag{6.31}$$

and so

$$|\sigma(m_0')|>A_t(m_0')^{\frac{11}{4}}>A_tn^{\frac{11}{4}}.$$

Hence

$$A_tn^{\frac{11}{2}}\mu'(n)\leqq\sum_{\frac{1}{2}n}^{n}(\sigma(m))^2<An^{\frac{13}{2}-\alpha},\quad[34])$$

$$\mu(n)=\mu'(n)+\mu''(n)<n(A_tn^{-\alpha}+16^{-t}). \tag{6.32}$$

---

[33]) P. N. 4, 179.

[34]) We use α momentarily for an indicial A (*i.e.* an absolute c). We may plainly suppose $\alpha<1$.

If $\nu(n)$ is the total number of non-representable numbers less than n, then, by (6.32),

$$\nu(n) = \mu(n) + \mu\left(\tfrac{1}{2}n\right) + \mu\left(\tfrac{1}{4}n\right) + \dots$$

$$< n\left(\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1} A_t n^{-\alpha} + 2 \cdot 16^{-t}\right) < \varepsilon n,$$

by choice first of t and then of n. This proves Theorem 3.

7. Proof of Theorem 4.

7.1. We denote by

$$N_s(n) = N_{k,s}(n)$$

the number of distinct numbers not exceeding n and representable by s or fewer positive k-th powers, and by

$$\nu_s(n) = \nu_{k,s}(n) = n + 1 - N_{k,s}(n)$$

the number not so representable; and by

$$\alpha_s = \alpha_s(k)$$

the largest number ξ such that

$$N_s(n) > C_\varepsilon n^{\xi-\varepsilon}$$

for $n \geqq n_0(k, s, \varepsilon)$. It is plain that α_s exists, does not exceed 1, and is a non-decreasing function of s. Also, as there are $[n^a] + 1$ k-th powers which do not exceed n, we have $\alpha_s \geqq a$ for $s \geqq 1$.

Lemma 22. *We have*

$$\alpha_s \geqq 1 - (1-2a)(1-a)^{s-2} \qquad (s \geqq 2). \tag{7.11}$$

First, suppose $s = 2$. Then (7.11) is $\alpha_2 \geqq 2a$, and is an obvious deduction from the formulae

$$\sum_1^n r_2(m) \sim B n^{2a}, \qquad r_2(n) < B_\varepsilon n^\varepsilon.$$

We may suppose then that $s > 2$.

We divide the interval $(1, n)$ into the $\mathfrak{n} = [n^a]$ parts

$$(1^k, 2^k), (2^k, 3^k), \dots, (\mathfrak{n}^k, n)$$

of which the last may disappear). We denote the interval beginning at j^k by δ_j, and its length by l_j. Then $l_j > k j^{k-1}$, except possibly for the last interval. If then we consider in particular the intervals δ_j included in $(\frac{1}{4}n, \frac{3}{4}n)$, it is clear that there are at least Bn^a such intervals, and that each of them is of length greater than Bn^{1-a}.

In $(0, l_j)$ lie $N_{s-1}(l_j)$ numbers representable by $s-1$ k-th powers; and so more than $N_{s-1}(Bn^{1-a})$ such numbers. Adding each of these to j^k, we obtain more than $N_{s-1}(Bn^{1-a})$ *distinct* numbers, lying in δ_j, and representable by s k-th powers. It follows that

$$N_s(n) \geqq Bn^a N_{s-1}(Bn^{1-a}),$$

and therefore that

$$\alpha_s \geqq a + (1-a)\alpha_{s-1}. \tag{7.12}$$

From this (7.11) follows by induction.

7.2. For the proof of Theorem 4 we work with a new value of the number β of § 6, viz.

$$\beta = \frac{2sa-1}{2s},$$

observing that the necessary condition $\beta < a_1$ is satisfied if $2s\delta < 1$, which is certainly true if δ is sufficiently small. This value of makes

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{(2sa-1)(sa-2)}{s}. \tag{7.21}$$

We denote now by $\lambda = \lambda_s = \lambda_{k,s}$ the number defined by (6.171) and (6.172) when β has its new value.

Lemma 23. *If*

$$s \geqq \mathrm{Max}(\Gamma(k), 2k+1, s_0+1)\ . \tag{7.22}$$

then

$$r_s(n) < C_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon}. \tag{7.23}$$

The proof is similar to that of Theorem 2 (§ 6.2). If m is non-representable

$$(\sigma_s(m))^2 = (r_s(m) - \varrho_s(m))^2 = (\varrho_s(m))^2 > Cm^{2sa-2},$$

$$r_s(n) - r_s\left(\tfrac{1}{2}n\right) < Cn^{2-2sa}\sum_{\frac{1}{2}n}^{n}(\sigma_s(m))^2$$

$$< Cn^{2-2sa}.C_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda+\varepsilon} < C_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon},$$

$$r_s(n) < C_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon}\left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\lambda+\varepsilon} + \ldots\right) < C_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon}.$$

Lemma 24. *Suppose that s satisfies* (7.22). *Then if $\lambda_s > 1 - a_{s'}$, and therefore certainly if*

$$\lambda_s > (1-2a)(1-a)^{s'-2} \qquad (s' \geqq 2) \tag{7.24}$$

we have

$$G(k) \leqq s + s'. \tag{7.25}$$

In fact, if n is not representable by $s+s'$ powers, there are at least $N_{s'}(n)$ numbers, not exceeding n, which are not representable by s powers. hat is,

$$\nu_s(n) \geqq N_{s'}(n), \quad 1-\lambda_s \geqq \alpha_{s'}$$

contradiction with the hypothesis $\lambda_s > 1-\alpha_{s'}$.

7.3. We are now in a position to prove Theorem 4. The case $=4$ is exceptional, and we suppose first that $k>4$. We shall verify at numbers s and s' exist which satisfy the conditions

$$s+s' = \left(\tfrac{1}{2}k-1\right)K+k+5+[\zeta_k]; \tag{7.31}$$

$$s \geqq \Gamma(k), \quad s \geqq 2k+1, \quad s>s_0, \quad s' \geqq 2; \tag{7.32}$$

$$\lambda_s > (1-2a)(1-a)^{s'-2}. \tag{7.33}$$

e shall prove that these conditions are satisfied by taking

$$s = \left(\tfrac{1}{2}k-1\right)K+k+1 = s_0+k-1, \quad s' = [\zeta_k]+4. \tag{7.34}$$

In the first place, these values of s and s' satisfy (7.31). Next

$$s_0 > \tfrac{1}{2}(k-2)2^{k-1} > 2^{k-3}k \geqq 4k \geqq \mathrm{Max}(\Gamma(k), 2k+1). \tag{7.35}$$

hus the first three inequalities (7.32) are satisfied. Also ζ_k is positive, nce its numerator is

$$\log\frac{s_0-2}{k} > 0;$$

nd so the last inequality (7.32) is also satisfied. It remains only to erify (7.33).

When we substitute the value of s from (7.34) into (7.21) and 3.172), we find

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{(2s_0+k-2)(s_0-k-1)}{k^2(s_0+k-1)}, \quad \lambda_4 = \frac{2a(k-1)}{K}, \quad \lambda_5 = 2a.$$

f these numbers, the least is λ_4. For it is obvious that $\lambda_4 < \lambda_5$; and $\geqq 4k+1$ if $k \geqq 5$, so that

$$\lambda_1 \geqq \frac{9}{k}\frac{3k}{5k} > 2a = \lambda_5.$$

ence $\lambda = \lambda_4$, and it is only necessary to verify the inequality

$$\lambda = \lambda_4 = \frac{2a(k-1)}{K} > (1-2a)(1-a)^{[\zeta_k]+2}. \tag{7.36}$$

his is

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{[\zeta_k]+2} > \frac{(k-2)K}{2(k-1)}$$

or

$$[\zeta_k]+1>\frac{(k-2)\log 2-\log k+\log(k-2)}{\log k-\log(k-1)}=\zeta_k \tag{7.37}$$

which is true. Hence (7.33) is true[35].

7.4. It remains to consider the case $k=4$; here $[\zeta_k]=2$ and we have to prove that $G(4)\leqq 19$. The difficulty is that $s_0+k-1=13<\Gamma(k)$; and this difficulty cannot be overcome directly by another choice of s and s'. There are two alternatives.

(i) We may consider each progression $l \pmod{16}$ separately as follows. Let $\nu_{s,l}(n)$ be the number of numbers $m\equiv l$, not exceeding n, and not representable by s fourth powers; and $N_{s',l'}(n)$ the number of distinct numbers $m\equiv l'$, not exceeding n, and representable by s' fourth powers.

It may be shown, on the one hand that

$$|\mathfrak{S}(m)|>A \qquad (s=s_0+3=13,\ m\not\equiv 0, 14, 15) \tag{7.41}$$

and so

$$\nu_{s,l}(n)<A_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon} \qquad (l\not\equiv 0, 14, 15); \tag{7.42}$$

and on the other that

$$N_{s',l'}(n)>A_\varepsilon n^{\alpha_{s'}-\varepsilon}, \tag{7.43}$$

where $\alpha_{s'}$ satisfies (7.11). Suppose now that arbitrarily large numbers $n\equiv l$ are non-representable by 19 fourth powers. We take $s=13$, $s'=6$, choosing l' so that

$$l-l'\not\equiv 0, 14, 15.$$

Then the argument of Lemma 24 shows that there exist at least $N_{s',l'}(u)$ numbers m, less than n, not congruent to 0, 14 or 15, and not representable by s' fourth powers. Thus

$$N_{s',l'}(n)\leqq \nu_{s,l}(n),$$

and so

$$1-\lambda_s\geqq\alpha_{s'}.$$

But this is false, since calculation gives

$$1-\lambda_s=\frac{13}{16}<\frac{431}{512}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^4\leqq\alpha_{s'}.$$

The proof of (7.41), however, reopens the question of the arithmetic of the singular series, which we do not wish to discuss here. We therefore adopt a second alternative.

---

[35]) It may be shown that no other choice of s and s' leads to a better value of $s+s'$.

(ii) We take the pair of numbers $s = 15$, $s' = 4$; it happens that can, by a special device, suggested to us by Mr. A. E. Ingham, prove that

$$r_s(n) < A_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon}$$

$s = 15$, and this proves to be sufficient for our purpose.

Let $\tau_t(\xi)$ be the number of numbers m for which (i) $16^t \mid m$,) $0 < m \leqq \xi$, (iii) m is not representable as a sum of 15 fourth wers. If now $\frac{1}{2}n < m \leqq n$ and $16 + m$, we have[35a])

$$\varrho(m) > A m^{\frac{11}{4}} > A n^{\frac{11}{4}} = A n^{s a - 1};$$

d, if also m is non-representable,

$$|\sigma(m)| > A n^{s a - 1}.$$

nce by (6.17)[36])

$$\left(\tau_0(n) - \tau_0\left(\tfrac{1}{2}n\right)\right) n^{2sa-2} \leqq A \sum_{\frac{1}{2}n}^{n} (\sigma(m))^2 < A_\varepsilon n^{2sa-1-\lambda+\varepsilon},$$

$$\tau_0(n) - \tau_0\left(\tfrac{1}{2}n\right) < A_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon},$$

ence

.44) $$\tau_0(n) < A_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon}.$$

Now a number $m = 16^t m'$ is representable as a sum of 15 fourth wers if and only if m' is so representable. Hence

$$\tau_t(\xi) = \tau_0(\xi \cdot 16^{-t})$$

d so

$$r_{4,15}(n) = \sum_{t=0}^{\infty} \tau_t(n) = \sum_{t=0}^{\infty} \tau_0(n \cdot 16^{-t}) < A_\varepsilon n^{1-\lambda+\varepsilon},$$

(7.44). Now

$$\lambda = \operatorname{Min}\left(\frac{(15-2)(15-8)}{8 \cdot 15}, \frac{15-10}{16}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16},$$

d

$$\lambda = \frac{5}{16} > \frac{9}{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = (1-2a)(1-a)^{s'-2}$$

$s' = 4$. Our former argument therefore applies to show that

$$G(k) \leqq 15 + 4 = 19;$$

d the proof of Theorem 4 is completed.

[35a]) This is the special case of (6.31) in which $t = 0$.

[36]) Valid since $15 > 8 = 2k$.

8. Proof of Theorems 5—9.

8.1. In this section we use the Farey dissection of order $N_2 = [n^{1-3\alpha}]$, the major and minor arcs being defined by $q \leqq n^\alpha$ and $q > n^\alpha$, and α being a number of type c, which will be chosen small enough for our purposes. It is plain that, if α is small enough, every major arc $\mathfrak{M}_2$ is part of an $\mathfrak{M}_1$ and *a fortiori* of an $\mathfrak{M}$.

We return to the analysis of 6.1. We take (6.11), replacing $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{m}_1$ by $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{m}_2$, and we have to show that each of the terms J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 is less than $Cn^{2s\alpha-1-c}$. An examination of the argument shows that, except in respect of J_3, it requires very little alteration.

(i) The term J_5 is disposed of by Lemma 16, and no further discussion is necessary.

(ii) J_2 and J_4 are disposed of by (6.13) and (6.15), each of which depends on Lemma 19 (and so on Lemmas 17 and 18). The result of Lemma 17 stands with N_2 in place of N_1; and (5.28) is replaced by

$$\sum \int_\xi G^2 |d\theta| < C\nu^4 N_2^{2s\alpha-1} \log(N_2+2)$$
$$< Cn^{(1-3\alpha)(2s\alpha-1)+4\beta} \log n.$$

This is plainly of the form required if β is chosen sufficiently small.

The other sums which appear in (5.35) and (5.36)[37]) present no difficulty. The first sum on the right hand side of (5.35) is disposed of by the trivial Lemma 13; and the second, and likewise the corresponding sum in (5.36), by Lemma 15, which is still available. We require only that $q > \nu$ on every $\mathfrak{m}_2$, and this will certainly be so if $\beta < \alpha$.

(iii) J_1 is disposed of by (6.121) or (6.122). Here we use the latter inequality and observe that it is true *a fortiori* for arcs $\mathfrak{M}_2$.

Thus each of the terms J_1, J_2, J_4, J_5 is of the form required. This could naturally have been proved more simply, had we been working from the beginning in terms of the dissection we are using now.

8.2. It remains to prove that

$$J_3 = \sum \int_{\mathfrak{m}_2} |f|^{2s} |d\theta| < Cn^{2s\alpha-1-c}. \tag{8.21}$$

It is here only that we use Hypothesis K.

If $\beta < \alpha$, as we have supposed, and x is on an $\mathfrak{m}_2$, then either (i) it is on an $\mathfrak{m}_1$ or (ii) it is on an $\mathfrak{M}_1$ for which $q > \nu$. In case (i)

$$|f| < B_\varepsilon n^{\alpha x+\varepsilon} < Cn^{\alpha-c} \tag{8.22}$$

[37]) With $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{m}_2$ for $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{m}_1$.

fixing ε; and in case (ii)

$$|f| \leqq |\varphi| + |f-\varphi| < A\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right| |y|^{-\alpha} + B_\varepsilon n^{\alpha x+\varepsilon} \tag{8.23}$$
$$< Bq^{-\alpha} n^{\alpha} + B_\varepsilon n^{\alpha x+\varepsilon} < Cn^{\alpha-c},$$

fixing ε and β. Hence

$$J_3 < Cn^{2(s-k)(\alpha-c)} \int_0^{2\pi} |f|^{2k} d\psi < Cn^{2s\alpha-2-c}(1+\Sigma(r_k(m))^2 |x|^{2m}) \tag{8.24}$$
$$< C_\varepsilon n^{2s\alpha-2-c}(1-|x|)^{-1-\varepsilon} < C_\varepsilon n^{2s\alpha-1-c+\varepsilon} < Cn^{2s\alpha-1-c},$$

fixing ε once more.

This completes the proof of Theorem 5. Theorems 6 and 7 require further proof, the first following from 5 as 2 followed from 1, and 7 being merely a restatement.

8.3. In proving Theorem 8, we revert to the method of P.N. 1. We have

$$r_s(n) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f^s}{x^{n+1}} dx \tag{8.31}$$
$$= \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{M}_2} \frac{f^s}{x^{n+1}} dx + \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{m}_2} \frac{f^s}{x^{n+1}} dx = S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{M}_2} \frac{f^s-\varphi^s}{x^{n+1}} dx + \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{M}_2} \frac{\varphi^s - F_{p,q}}{x^{n+1}} dx \tag{8.32}$$
$$+ \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{M}_2} \frac{F_{p,q}}{x^{n+1}} dx = S_3 + S_4 + S_5,$$

y. We prove first that

$$|S_j| < Cn^{s\alpha-1-c} \qquad (j = 2, 3, 4). \tag{8.33}$$

Taking S_2 first, we have

$$|S_2| < A\sum \int_{\mathfrak{m}_2} |f|^s |d\theta| < Cn^{(s-2k)(\alpha-c)} \sum \int_{\mathfrak{m}_2} |f|^{2k} |d\theta|$$

y (8.22) and (8.23). Arguing as in § 8.2, we find

$$|S_2| < C_\varepsilon n^{s\alpha-1-c+\varepsilon} < Cn^{s\alpha-1-c}.$$

This disposes of S_2. That S_4 is of the form required is obvious; is in fact less than C (as in Lemma 13). As regards S_3, we have

$$|f^s - \varphi^s| < A_s |f-\varphi|^s + A_s |f-\varphi|\,|\varphi|^{s-1}$$
$$< C_\varepsilon n^{s\alpha x+\varepsilon} + C_\varepsilon n^{\alpha x+\varepsilon} |y|^{-\alpha(s-1)}$$

(since every $\mathfrak{M}_2$ is part of an $\mathfrak{M}_1$). The first term here contributes less than

$$C_\varepsilon n^{s\alpha\varkappa+\varepsilon}\sum\int_{\mathfrak{M}_2}|d\theta| < C_\varepsilon n^{s\alpha\varkappa+\varepsilon}\cdot A\sum_{q\leqq n^\alpha}\sum_p\frac{1}{qn^{1-3\alpha}}$$
$$< C_\varepsilon n^{s\alpha\varkappa+4\alpha-1+\varepsilon} < Cn^{s\alpha-1-\varepsilon},$$

when ε and α are chosen appropriately. And the second term contributes less than

$$C_\varepsilon n^{\alpha\varkappa+\varepsilon}\sum\int_{\mathfrak{M}_2}|y|^{-\alpha(s-1)}|d\theta| < C_\varepsilon n^{\alpha\varkappa+\varepsilon}\cdot n^{\alpha(s-1)-1}\cdot\sum_{q\leqq n^\alpha}\sum_p 1$$
$$< C_\varepsilon n^{s\alpha-1-\alpha(1-\varkappa)+2\alpha+\varepsilon} < Cn^{s\alpha-1-\varepsilon}.$$

This completes the proof of (8.33).

8.4. The proof of Theorem 8 is thus reduced to a proof that

$$S_5 = \sum\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{M}_2}\frac{F_{p,q}}{x^{n+1}}dx = \varrho_s(n)+O(n^{s\alpha-1-\varepsilon}). \tag{8.41}$$

We write

$$S_5 = \sum\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F_{p,q}}{x^{n+1}}dx - \sum\frac{1}{2\pi i}\int_\eta\frac{F_{p,q}}{x^{n+1}}dx = S_6+S_7, \tag{8.42}$$

η being, as in P.N. 1, the arc of Γ complementary to ξ (or $\mathfrak{M}_2$). On η, $|\theta|>\frac{A}{qN_2}$, and so

$$|F_{p,q}| < C\left|g(|x|e^{-i\theta})\right| < C|\theta|^{-s\alpha},$$

by Lemma 12. Hence

$$\int_\eta|F_{p,q}||d\theta| < C\int_{\frac{A}{qN_2}}^\infty\theta^{-s\alpha}d\theta < C(qN_2)^{s\alpha-1},$$

$$|S_7| < A\sum\int_\eta|F_{p,q}||d\theta| < CN_2^{s\alpha-1}\sum_{q\leqq n^\alpha}\sum_p q^{s\alpha-1} \tag{8.43}$$
$$< CN_2^{s\alpha-1}n^{(s\alpha+1)\alpha} < Cn^{s\alpha-1-2\alpha(s\alpha-2)} < Cn^{s\alpha-1-\varepsilon},$$

since $s\alpha>2$ and α is a c.

Finally

$$S_6 = \mathfrak{S}n^{s\alpha-1}\sum_{p,q\leqq n^\alpha}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np) = n^{s\alpha-1}(\mathfrak{S}(n)-\mathfrak{S}_2(n))$$

(the ν of $\mathfrak{S}_2(n)$ being now n^α). Hence, by Lemma 3 (3.313), (8.42), and (8.43),

$$S_5 = n^{s\alpha-1}\mathfrak{S}(n)+O(n^{s\alpha-1-\varepsilon})+O(n^{s\alpha-1-\alpha(s\alpha-2)}) = \varrho_s(n)+O(n^{s\alpha-1-\varepsilon});$$

which completes the proof.

8.5. Theorem **9** is an obvious corollary of Theorem **8**. We conclude e memoir by showing that when, as is usually the case[38]), $\Gamma(k) \leqq k+1$, eorem **9** may be deduced in an elementary manner from Theorem **6**.

We know that

$$\sum_1^n r_{k,k}(m) \sim Bn.$$

nce, if Hypothesis K is true, there are more than $B_\varepsilon n^{1-\varepsilon}$ numbers s than n and representable by k k-th powers[39]). If n_1 is such a number s than n, and n is not representable by $2k+1$ powers, then none of e numbers $n-n_1$ is representable by $k+1$. That this should happen an infinity of values of n would plainly contradict Theorem **6**.

---

[38]) See P. N. 4, 184, for an analysis of the exceptional cases.

[39]) In fact, in the notation of § 7, $\alpha_s = 1$ $(s \geqq k)$.

(Eingegangen am 18. Juni 1924.)

Einige Sätze über Fourierreihen fastperiodischer Funktionen.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

Einleitung.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung[1]) habe ich eine gewisse Klasse von Funktionen, die „fastperiodischen" Funktionen, untersucht, welche folgendermaßen definiert wurden:

Eine für $-\infty < x < \infty$ *stetige Funktion* $f(x) = u(x) + iv(x)$ *soll fastperiodisch heißen, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Länge* $l = l(\varepsilon) > 0$ *gibt derart, daß jedes Intervall* $\alpha < x < \beta$ *der Länge* $\beta - \alpha = l$ *mindestens eine zu* ε *gehörige „Verschiebungszahl"* τ *enthält, d. h. eine Zahl* $\tau = \tau(\varepsilon, f)$, *welche für alle* x *der Ungleichung*

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

genügt.

Das Hauptresultat der Untersuchung war der Nachweis, daß die fastperiodischen Funktionen mit denjenigen Funktionen übereinstimmen, welche *in eine abzählbare (oder endliche) Anzahl von periodischen Schwingungen* $a_n e^{i\lambda_n x}$ aufgelöst werden können, wobei die Exponenten λ_n beliebige reelle Zahlen sind[2]).

In der anfangs zitierten Arbeit wurde eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen rein periodischer (stetiger) Funktionen gegeben;

---

[1]) Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, Acta Mathematica 45 (1924), S. 29–127.

[2]) In einer zweiten Abhandlung, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II, welche demnächst in Acta Mathematica erscheinen wird, wird der obigen Behauptung die folgende besonders prägnante Form gegeben: *Für die Fastperiodizität einer Funktion* $f(x)$ *ist notwendig und hinreichend, daß sie sich durch irgendeine Folge von trigonometrischen Summen* $\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$ *gleichmäßig approximieren läßt.*

r allem wurde gezeigt, *daß zu jeder fastperiodischen Funktion* $f(x)$ *ne eindeutig bestimmte Reihe der Form*

$$\Sigma A_n e^{i\lambda_n x}$$

hört, die Fourierreihe der Funktion $f(x)$, *welche ihrerseits die Funktion* $x)$ *eindeutig bestimmt.* Es war leicht zu zeigen, daß hierbei

$$\Sigma |A_n|^2 \leqq \mathfrak{M}\{|f(x)|^2\} \tag{1}$$

, wo $\mathfrak{M}\{|f(x)|^2\}$ den Mittelwert

$$\mathfrak{M}\{|f(x)|^2\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx$$

ezeichnet. Dagegen war eine eingehende Untersuchung nötig, um zu beeisen, daß in der Relation (1) tatsächlich immer das *Gleichheitszeichen* iltig ist, *daß also immer*

$$\Sigma |A_n|^2 = \mathfrak{M}\{|f(x)|^2\} \tag{2}$$

t. Dieser Satz, der „Fundamentalsatz" der Theorie, konnte auch so rmuliert werden, daß der Mittelwert

$$S_N = \mathfrak{M}\{|f(x) - \sum_{1}^{N} A_n e^{i\lambda_n x}|^2\}$$

r $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert, daß also die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\lambda_n x}$ im Mittel" gegen $f(x)$ konvergiert.

Dagegen braucht die Fourriereihe $\Sigma A_n e^{i\lambda_n x}$ *nicht* im gewöhnlichen nne zu konvergieren. In einem wichtigen Spezialfall, nämlich demnigen, wo *die Fourierexponenten* λ_n *linear unabhängig* sind, konnte doch gezeigt werden, daß gewöhnliche Konvergenz (und sogar absolute onvergenz) stattfindet, indem hier nicht nur die obige Reihe $\Sigma |A_n|^2$, ndern auch *die Reihe* $\Sigma |A_n|$ *selbst konvergiert.* Dieser Satz wurde us dem Fundamentalsatz unter Verwendung des berühmten Kroneckerhen Approximationssatzes (in einer von Weyl herrührenden Verschärng) abgeleitet. In der vorliegenden Arbeit werde ich zunächst einen nderen Beweis dieses Satzes geben, wo ich die Heranziehung des roneckerschen Satzes vermeide, und zwar dadurch, daß ich eine Meode, welche ich in einer früheren Arbeit [3]) zum *Beweise* des Kroneckerhen Satzes angewendet habe, nunmehr direkt auf die Fourierreihe verende [4]). Auch bei diesem neuen Beweise der Konvergenz der Reihe

[3]) Another Proof of Kroneckers Theorem, Proceedings London Math. Soc. (III) (1923), S. 315—316.

[4]) In ähnlicher Weise sind in einer soeben erschienenen gemeinsamen Arbeit n Herrn Landau und dem Verfasser (Nachtrag zu unseren Abhandlungen aus

$\Sigma |A_n|$ wird der Fundamentalsatz $\Sigma |A_n|^2 = \mathfrak{M}\{|f(x)|^2\}$ benutzt, jedoch in einer wesentlich andersartigen Fassung, nämlich in der Form des „Multiplikationssatzes", welcher besagt, daß die Fourierreihe des Produktes zweier fastperiodischer Funktionen einfach durch formale Multiplikation der beiden zu den Faktoren gehörigen Fourierreihen entsteht[5]).

Gegenüber dem ursprünglichen, mehr anschaulichen Beweis hat der neue Beweis, welcher mehr rechnerisch verläuft, den Vorteil größerer Kürze. Vor allem aber läßt er sich leichter zur Behandlung anderer Probleme aus der Theorie der Fourierreihen fastperiodischer Funktionen verallgemeinern. So werde ich in der vorliegenden Abhandlung mit Hilfe der neuen Methode einen Satz beweisen, welcher die gröbste Art von eigentlicher Divergenz einer Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\lambda_n x}$ in einem Punkte x_0 (hier den Punkt $x_0 = 0$) ausschließt, indem er besagt, *daß in dem Falle, wo die Fourierkoeffizienten A_n einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ alle reell und positiv sind, die Reihe ΣA_n konvergiert.*

§ 1

Beweis zweier Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es seien $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$ untereinander verschiedene reelle Zahlen, und $A_1, \ldots, A_N$ beliebige positive Zahlen. Es werde bei positivem ganzem k die Summe*

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}\Big)^k = \sum_{m=1}^{M(k)} a_m^{(k)} e^{i\lambda_m^{(k)} x}$$

gebildet. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{m=1}^{M(k)} (a_m^{(k)})^2} = \sum_{n=1}^{N} A_n. \tag{3}$$

Beweis. 1. Für jede Summe $\Sigma a_m e^{i\lambda_m x}$ mit endlich vielen Gliedern (und untereinander verschiedenen reellen λ) gilt bekanntlich, wegen

$$\mathfrak{M}\{e^{i\mu x}\} = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\mu x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \gtrless 0 \\ 1 & \text{für } \mu = 0, \end{cases}$$

die Relation

$$\mathfrak{M}\{|\Sigma a_m e^{i\lambda_m x}|^2\} = \mathfrak{M}\{\Sigma a_m e^{i\lambda_m x} \cdot \Sigma \bar{a}_m e^{-i\lambda_m x}\} = \Sigma |a_m|^2.$$

---

den Jahrgängen 1910 und 1923, Göttinger Nachr. 1924) die bekannten Abschätzungen für die Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(s) \neq O(1)$ und $\frac{1}{\zeta(s)} \neq O(1)$ für $\sigma > 1$, ohne direkte Heranziehung von Sätzen über diophantische Approximationen abgeleitet.

[5]) Vgl. § 5 der in Note 1 zitierten Abhandlung, wo gezeigt wird, daß der Multiplikationssatz mit dem Fundamentalsatz inhaltlich ganz äquivalent ist.

mit ist

$$\sum_{m=1}^{M(k)} (a_m^{(k)})^2 = \mathfrak{M}\{|\sum_{m=1}^{M(k)} a_m^{(k)} e^{i\lambda_m^{(k)} x}|^2\} = \mathfrak{M}\{|\sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}|^{2k}\}$$

$$\leqq \max_{-\infty<x<\infty} |\sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}|^{2k} = (\sum_{n=1}^{N} A_n)^{2k},$$

o

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{m=1}^{M(k)} (a_m^{(k)})^2} \leqq \sum_{n=1}^{N} A_n.$$

2. Andererseits ist aber auch

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{m=1}^{M(k)} (a_m^{(k)})^2} \geqq \sum_{n=1}^{N} A_n.$$

enn bei jedem festen k ist die Gliederanzahl $M(k) \leqq$ der Gliederanzahl der Polynomialentwicklung von $(x_1 + \ldots + x_N)^k$, also gewiß $\leqq (k+1)^N$. erner sind die $a_m^{(k)}$ alle positiv und

$$\sum_{m=1}^{M(k)} a_m^{(k)} = (\sum_{n=1}^{N} A_n)^k.$$

aher ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(\sum_{n=1}^{N} A_n)^{2k} = (\sum_{m=1}^{M(k)} a_m^{(k)})^2 \leqq \sum_{m=1}^{M(k)} (a_m^{(k)})^2 \cdot \sum_{m=1}^{M(k)} 1^2 \leqq \sum_{m=1}^{M(k)} (a_m^{(k)})^2 \cdot (k+1)^N,$$

h.

$$\sum_{m=1}^{M(k)} (a_m^{(k)})^2 \geqq (k+1)^{-N} \cdot (\sum_{n=1}^{N} A_n)^{2k},$$

oraus sich, wegen $\sqrt[k]{k+1} \to 1$, die gesuchte Ungleichung (4) sofort gibt.

Hilfssatz 2. *Es seien $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$ linear unabhängige reelle Zahlen, nd $A_1, \ldots, A_N$ beliebige komplexe Zahlen $\neq 0$. Es werde bei einem ositiven ganzen k die Summe*

$$(\sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x})^k = \sum_{m=1}^{M(k)} a_m^{(k)} e^{i\lambda_m^{(k)} x}$$

ebildet. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{m=1}^{M(k)} |a_m^{(k)}|^2} = \sum_{n=1}^{N} |A_n|.$$

Beweis. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Zahlen Λ_n lassen ch in der Polynomialentwicklung von $(\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x})^k$ keine zwei Glieder usammenziehen. Somit ist auch

$$(\sum_{n=1}^{N} |A_n| e^{i\Lambda_n x})^k = \sum_{m=1}^{M(k)} |a_m^{(k)}| e^{i\lambda_m^{(k)} x},$$

und Hilfssatz 1, auf diese letzte Entwicklung angewendet, liefert uns sofort die gesuchte Gleichung (5).

§ 2.

Linear unabhängige Fourierexponenten.

Satz A. *Es seien die Fourierexponenten Λ_n der fastperiodischen Funktion $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x}$ linear unabhängig. Dann ist die Reihe $\Sigma |A_n|$ konvergent.*

Beweis. Es bezeichne G die obere Grenze der (beschränkten[6]) Funktion $|f(x)|$. Wäre der Satz falsch, so gäbe es ein N derart, daß

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} |A_n| > G \tag{6}$$

wäre; ich werde zeigen, daß diese Ungleichung (6) zu einem Widerspruch führt. Dazu betrachte ich, bei einem positiven ganzen k, die Summe

$$\left(\sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}\right)^k = \sum_{m=1}^{M(k)} a_m^{(k)} e^{i\lambda_m^{(k)} x}.$$

Wegen der *linearen Unabhängigkeit* der Exponenten Λ_n ist diese endliche Summe offenbar eine Teilsumme der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} e^{i\Lambda_n^{(k)} x}, \tag{7}$$

welche durch formale Ausrechnung von

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}\right)^k$$

hervorgeht. Diese Reihe (7) ist aber nach dem „Multiplikationssatz" die Fourierreihe der Funktion $(f(x))^k$, und es ist somit nach (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(k)}|^2 \leqq \mathfrak{M}\{|f(x)|^{2k}\} \leqq G^{2k}.$$

Also ist a fortiori

$$\sum_{m=1}^{M(k)} |a_m^{(k)}|^2 \leqq G^{2k},$$

d. h.

$$\sqrt[2k]{\sum_{m=1}^{M(k)} |a_m^{(k)}|^2} \leqq G. \tag{8}$$

Andererseits ist aber nach dem Hilfssatz 2

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{m=1}^{M(k)} |a_m^{(k)}|^2} = \sum_{n=1}^{N} |A_n| = s_N,$$

was, wegen $s_N > G$, nicht mit (8) verträglich ist.

[6]) Vgl. Satz 1 der in Note 1 zitierten Abhandlung.

§ 3.

Positive Fourierkoeffizienten.

Satz B. *Es seien die Fourierkoeffizienten A_n der fastperiodischen Funktion $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n e^{i\Lambda_n x}$ alle positiv. Dann ist die Reihe ΣA_n konvergent.*

Beweis. Wir nehmen an, der Satz sei falsch, und bestimmen unter dieser Annahme die Zahl N so groß, daß

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} A_n > G$$

, wo G wiederum die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet. Danach lden wir bei einem positiven ganzen k die Summe

$$\left(\sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}\right)^k = \sum_{m=1}^{M(k)} a_m^{(k)} e^{i\lambda_m^{(k)} x}.$$

a die Λ_n nicht als linear unabhängig vorausgesetzt sind, können wir hier cht schließen, daß diese Summe eine Teilsumme der formal gebildeten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} e^{i\Lambda_n^{(k)} x} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}\right)^k,$$

h. der Fourierreihe von $(f(x))^k$, ist. Weil aber die A_n alle positiv nd, ist klar, daß jeder der $M(k)$ Exponenten $\lambda_m^{(k)}$ auch ein Fourierponent $\Lambda_n^{(k)}$ ist, und daß die entsprechenden (positiven) Koeffizienten $^{(k)}$ und $A_n^{(k)}$ die Relation

$$a_m^{(k)} \leqq A_n^{(k)}$$

füllen. Somit ist

$$\sum_{m=1}^{M(k)} \left(a_m^{(k)}\right)^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{(k)}\right)^2,$$

so

$$\sum_{m=1}^{M(k)} \left(a_m^{(k)}\right)^2 \leqq \mathfrak{M}\{|f(x)|^{2k}\} \leqq G^{2k}.$$

iese Ungleichung ist aber, wegen $s_N > G$, nicht mit der im Hilfssatz 1 fundenen Relation

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{m=1}^{M(k)} \left(a_m^{(k)}\right)^2} = \sum_{n=1}^{N} A_n = s_N$$

rträglich, womit der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 20. August 1924.)

Zusatz bei der Korrektur.

Nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn M. Fekete, dem ich den obigen Satz B mitgeteilt hatte, läßt sich aus diesem Satze der folgende allgemeinere Satz C ableiten.

Satz C. *Falls die Fourierkoeffizienten einer fastperiodischen Funktion* $f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\lambda_n x}$ *sämtlich einem Winkelraum W angehören, dessen Scheitelpunkt in dem Anfangspunkt liegt, und dessen Öffnung* $< \pi$ *ist, so ist die Reihe* $\Sigma |A_n|$ *konvergent.*

Der Beweis von Herrn Fekete verläuft folgendermaßen: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß der Winkelraum W in der rechten Halbebene und symmetrisch zur Achse der Reellen liegt. Aus

$$f(x) \sim \Sigma A_n e^{i\lambda_n x}$$

folgt

$$f(-x) \sim \Sigma \bar{A}_n e^{i\lambda_n x},$$

also

$$f(x) + \bar{f}(-x) \sim \Sigma (A_n + \bar{A}_n) e^{i\lambda_n x},$$

d. h. die nach Voraussetzung *positiven* Zahlen $\Re(A_n) = \frac{1}{2}(A_n + \bar{A}_n)$ sind die Fourierkoeffizienten der fastperiodischen Funktion $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \bar{f}(-x))$. Nach Satz B muß daher die Reihe

$$\Sigma \Re(A_n)$$

konvergent sein. Hieraus folgt aber weiter, daß auch die Reihe $\Sigma |A_n|$ konvergiert, weil ja

$$|\Im(A_n)| < \Re(A_n) \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

ist, wo 2α die Größe der Öffnung von W bezeichnet.

Über einen Satz von A. Markoff.

Von

G. Szegö in Berlin.

Wohlbekannt ist der folgende Satz von Tschebyscheff:

Unter allen Polynomen n-ten Grades, deren höchster Koeffizient (der *effizient von z^n) gleich* 1 *ist, hat im Intervall* $-1 \leqq z \leqq 1$ *das Polynom*

$$2^{1-n} \cos n \arccos z = \left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n + \left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n$$

s kleinste Maximum des absoluten Betrages. Dieses „minimum maxi- *mum" beträgt* 2^{1-n}.

Herr Faber hat neuerdings diese Aufgabe auf eine beliebige Kurve Γ r komplexen z-Ebene (anstatt der reellen Strecke $-1 \leqq z \leqq 1$) über- ıgen und auf diese Weise zu der Kurve Γ eine Folge von positiven Zahlen

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n, \ldots$$

geordnet. Hierbei war μ_n definiert als das kleinstmögliche Maximum s absoluten Betrages eines wie vorhin normierten Polynoms n-ten Grades f der Kurve Γ. Er zeigte, daß die Zahlen μ_n einer Grenzwertgleichung nügen, die sie zu einer wichtigen Konstante der Kurve Γ in einfache ziehung bringt, eine Konstante, die man mit Hilfe der Abbildung des ıßeren von Γ auf das Äußere eines Kreises definieren kann[1]). Herr Fekete t sodann diese Betrachtungen auf beliebige (beschränkte und abgeschlossene) engen erweitert[2]). Ich zeigte schließlich, daß die Zahlen μ_n auch in esem denkbar allgemeinsten Falle mit einer Konstante der gegebenen

---

[1]) G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome, Journal für die reine und an- wandte Mathematik 150 (1919), S. 79–106; Potentialtheorie und konforme Abbil- ng, Sitzungsberichte der bayerischen Akademie der Wissenschaften 1920, S. 49–64.

[2]) M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen eichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 228–249.

Menge zusammenhängen, die eine wichtige potentialtheoretische Bedeutung besitzt[3]).

In der vorliegenden Arbeit will ich von einer anderen klassischen Extremumaufgabe ausgehen und diese auf eine beliebige Menge übertragen. Auf diese Weise erhalte ich wiederum Zahlenfolgen, die von der gegebenen Menge (und außerdem noch von einem beliebig wählbaren Punkte) abhängen und ebenfalls auf enge Weise mit Eigenschaften der fraglichen Menge zusammenhängen. Diese Aufgabe rührt von A. Markoff her und findet ihre Lösung im folgenden Satz:

Es sei $f(z)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades, das im Intervall $-1 \leqq z \leqq 1$ der Ungleichung

$$|f(z)| \leqq 1 \tag{1}$$

genügt. Dann ist stets

$$|f'(1)| \leqq n^2. \tag{2}$$

Diese Grenze wird nur für das Polynom

$$\pm \cos n \arccos z$$

erreicht[4]).

Dieselbe Abschätzung gilt für $z = -1$, während in *inneren* Punkten des Intervalls $-1 \leqq z \leqq 1$ eine obere Grenze für $|f'(z)|$ existiert, die — wenigstens für große Werte von n — weitaus kleiner ist als die in (2). Es gilt nämlich unter der Voraussetzung (1)

$$|f'(z)| \leqq \frac{n}{\sqrt{1-z^2}} \qquad (-1 < z < 1). \tag{3}$$

Ich will hier nicht auf die naheliegende Beziehung dieser Ungleichung zu einem Satze von S. Bernstein eingehen[5]); es sei lieber eine Bemerkung von M. Riesz erwähnt, die er gelegentlich verwandter Untersuchungen[6]) machte.

---

[3]) G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete usw., Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 204—205.

[4]) A. Markoff, Über ein Problem von D. J Mendelejeff (russisch), Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg 62 (1889), S. 1—24. Bei A. Markoff werden nur Polynome mit reellen Koeffizienten betrachtet. Der Satz gilt jedoch allgemein, vgl. M. Riesz, a. a. O. [6]), S. 359.

[5]) Bezüglich der ausgedehnten Literatur über diesen Gegenstand sei auf die Arbeit von I. Schur, Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall, Math Zeitschr. 4 (1919), S 271—287, verwiesen

[6]) M. Riesz, Eine trigonometrische Interpolationsformel und ein ge Ung'eichungen für Polynome, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 23 (1914), S. 354—368. Vgl. S. 357, Satz I'.

Es sei $f(z)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades, das auf dem Einheitskreis $|z| \leqq 1$ der Ungleichung

$$|f(z)| \leqq 1$$

fügt. Dann gilt in einem Punkt z der Kreisperipherie, $|z| = 1$,

$$|f'(z)| \leqq n.$$

ese Grenze wird nur für die Polynome

$$\alpha z^n, \qquad |\alpha| = 1,$$

eicht.

Die bisher angeführten Ergebnisse geben nun zur folgenden allgemeinen trachtung Anlaß.

Es sei M eine beliebige beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der komplexen z-Ebene, z_0 ein beliebiger Punkt dieser Ebene, der ht notwendigerweise M angehört. Ich betrachte sämtliche Polynome) eines festen Grades n, welche auf der Menge M der Ungleichung

$$|f(z)| \leqq 1$$

hügen und frage nach einer oberen Schranke für den Betrag der Abung in dem festen Punkt z_0.

Es bezeichne genauer $\omega_n = \omega_n(M, z_0)$ die obere Grenze von $|f'(z_0)|$ die Gesamtheit aller zulässigen Polynome. Es kann leicht gezeigt rden, daß ω_n endlich ist und daß sogar die obere Grenze ω_n bei passen- Wahl des Polynoms $f(z)$ erreicht wird, d. h. daß ω_n das *Maximum* fraglichen Werte $|f'(z_0)|$ darstellt. Sind nämlich $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ neinander verschiedene Punkte von M und $\omega_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$, zugehörigen Grundpolynome der Lagrangeschen Interpolationsformel nn ist

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n+1} f(z_\nu)\, \omega_\nu(z),$$

o

$$|f'(z_0)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n+1} |\omega_\nu'(z_0)|.$$

e obere Grenze von $|f'(z_0)|$ für alle in Frage kommenden Polynome also gewiß endlich. Auf ähnliche Weise erhält man nun Schranken für höheren Ableitungen von $f(z)$ in $z = z_0$, d. h. für die Koeffizienten nach den Potenzen von $z - z_0$ geordneten Polynoms $f(z)$. Dann ist aber möglich auf geläufige Weise eine „Extremalfolge" von Polynomen en Grades $f(z)$ mit $|f(z)| \leqq 1$ zu konstruieren, die gegen ein Polynom nvergiert, das die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt und bei dem $(z_0)| = \omega_n$ ist.

Somit wird jeder beschränkten und abgeschlossenen Menge M und einem beliebigen Punkt z_0 (der nicht notwendig M angehört) eine Folge von positiven Zahlen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots \tag{6}$$

zugeordnet. Es ist z. B. $\omega_n = n^2$, wenn M das Intervall $-1 \leqq z \leqq 1$ und $z_0 = \pm 1$ ist; ferner $\omega_n <$ konst. n, wenn M das gleiche Intervall und z_0 einen inneren Punkt desselben bedeutet. Es ist $\omega_n = n$, wenn M der Einheitskreis und z_0 ein Punkt des Einheitskreises ist.

Ich frage jetzt nach dem Verhalten dieser Zahlen ω_n für große Werte von n, genauer, nach den Beziehungen, die zwischen der Größenordnung von ω_n und den Eigenschaften der Menge M, insbesondere in der Umgebung des Punktes z_0, bestehen.

Einige Eigenschaften der Zahlen ω_n gehen aus der Definition unmittelbar hervor. Es ist offenbar

$$\omega_1 \leqq \omega_2 \leqq \omega_3 \leqq \ldots \leqq \omega_n \leqq \ldots, \tag{7}$$

die Folge ω_n ist nicht abnehmend. Bezeichnet ferner M^* eine *Teilmenge* von M und ω_n^* die zu M^* und zu demselben Punkt z_0, wie früher, gehörigen Größen, die ähnlich definiert sind, wie die ω_n, dann gilt

$$\omega_n \leqq \omega_n^* \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

Ist schließlich z_0 ein *innerer* Punkt von M, dann bleibt $\omega_n(M, z_0)$ für jeden Wert von n beschränkt. Genauer, wenn eine Kreisscheibe um z_0 vom Radius ϱ ganz der Menge M angehört, dann ist

$$\omega_n \leqq \frac{1}{\varrho} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

In der Tat ist dies eine unmittelbare Folge der im folgenden oft benutzten, für eine beliebige, in der Kreisscheibe $|z - z_0| \leqq \varrho$ reguläre Funktion $F(z)$ gültigen Ungleichung

$$|F'(z_0)| \leqq \frac{1}{\varrho} \operatorname*{Max}_{|z-z_0| \leqq \varrho} |F(z)|.$$

Bei der Untersuchung von (6) sind also in erster Linie die Randpunkte z_0 von M (oder äußere Punkte) vom Interesse.

In § 2 und § 3 beschäftige ich mich mit dem Fall, wo M eine aus endlich vielen analytischen Bögen zusammengesetzte Kurve Γ, und z_0 ein Randpunkt von M ist. Es sei dann $\alpha\pi$ der *Außenwinkel* von Γ in dem fraglichen Randpunkt z_0, $0 \leqq \alpha \leqq 2$.[7]) Ist $\alpha > 0$, dann zeige ich, daß ω_n

[7]) D. h. $\alpha\pi$ ist die obere Grenze der Öffnungen aller von z_0 auslaufenden Winkelgebieten von der Art, daß ihre an z_0 genügend nahe gelegenen Punkte sämtlich außerhalb Γ gelegen sind. Diese Definition läßt sich auch für Schlitzbereiche

ie n^α unendlich wird; genauer, es gibt zwei positive, von n unabhängige onstanten A und B, so beschaffen, daß

$$Bn^\alpha < \omega_n < An^\alpha \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

n jedem Randpunkte, wo eine Tangente existiert, d. h. $\alpha = 1$ ist, hat lso ω_n dieselbe Größenordnung, wie etwa im Falle des Einheitskreises gl. (4)). Ferner wächst ω_n stärker oder langsamer als n, je nachdem es ch um eine ausspringende oder einspringende Ecke handelt.

Wenn $\alpha = 0$ ist, dann müssen besondere Untersuchungen angestellt erden. Ich zeige in § 4, daß in diesem Falle sich ein *beliebig langsames nwachsen* der Folge ω_n verwirklichen läßt, und zwar im wesentlichen daurch, daß man für M zwei analytische Bögen wählt, die einander im unkte z_0 genügend intensiv berühren. Andererseits wird in § 4 eine *obere* chranke für ω_n gegeben, die zeigt, daß ω_n für beliebiges z_0 höchstens ie eine Potenz R^n, $R > 1$, anwächst, vorausgesetzt, daß die gegebene enge M einer sehr allgemeinen Bedingung genügt. (Diese ist z. B. stets rfüllt, wenn M ein beliebig kleines Kurvenstück enthält.)

Schließlich wird in § 5 folgender Satz bewiesen:

Es gibt eine absolute Konstante K von folgender Beschaffenheit: Es ei $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades, das auf zwei Kreisen, die beide vom Radius 1 sind und einander von Außen berühren, die Bedingung

$$|f(z)| \leqq 1$$

rfüllt: dann gilt im Berührungspunkte z_0

$$|f'(z_0)| \leqq K \log n.$$

In den von z_0 verschiedenen Randpunkten der beiden Kreise gilt, mit Rücksicht auf die Ergebnisse von § 2 und § 3, eine Abschätzung, bei der die obere Schranke von $|f'(z)|$ wie n ins Unendliche geht.

§ 1.

Zwei Hilfssätze.

1. Es sei Γ eine aus endlich vielen analytischen Bögen zusammengesetzte Kurve oder Kurvenstück und $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades, das auf der Kurve Γ die Bedingung

$$|f(z)| \leqq 1$$

---

aufrechterhalten. Im Falle eines Schlitzbereiches, der durch zwei analytische Bögen, die beide von z_0 ausgehen, bestimmt ist, kommt nach dieser Definition als Außenwinkel der größere (nicht kleinere) der beiden Winkeln, die diese Bögen miteinander bilden, in Betracht.

erfüllt. Dann gilt außerhalb von Γ die Abschätzung

$$|f(z)| \leqq |\psi(z)|^n. \tag{9}$$

Hierbei ist

$$w = \psi(z) = cz + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots \qquad (c \text{ reell und positiv}) \tag{10}$$

diejenige eindeutig bestimmte Funktion, welche das Äußere von Γ auf das Kreisäußere $|w| > 1$ in der w-Ebene abbildet, so daß der unendlich ferne Punkt in sich übergeht und ein beliebiges Linienelement im unendlich fernen Punkt keine Drehung erfährt. (Im Falle eines Kurvenstückes Γ ist unter dem Äußeren von Γ die längs Γ aufgeschlitzte Vollebene zu verstehen.)

Dieser Hilfssatz ist eine unmittelbare Folge des Maximumprinzips, angewendet auf die Funktion

$$\frac{f(z)}{(\psi(z))^n},$$

die außerhalb von Γ stets regulär und auf Γ selbst dem Betrage nach $\leqq 1$ ist, da ja $|\psi(z)| = 1$ gilt, wenn z auf Γ liegt.

2. Wir brauchen weiter einige Eigenschaften der Abbildungsfunktion $\psi(z)$ in der Nähe eines Randpunktes von Γ. Insbesondere betrachten wir die Umgebung eines Punktes z_0 von Γ, in welchem der Außenwinkel von Γ [vgl. [7]] den Wert $\alpha\pi$ hat, $0 < \alpha \leqq 2$. Das Resultat, welches für unsere Zwecke in Betracht kommt, rührt von den Herren W. F. Osgood und E. H. Taylor her[8]). Es besagt, daß man $\psi(z)$ in der Form

$$\psi(z) - \psi(z_0) = (z - z_0)^{\frac{1}{\alpha}} \lambda(z) \tag{11}$$

schreiben kann, wobei $\lambda(z)$ in einer Umgebung von z_0 und außerhalb von Γ regulär, auf Γ selbst stetig und $\lambda(z_0) \neq 0$ ist. Wir brauchen hier jedoch weit weniger, nämlich lediglich die *Beschränktheit* von $\lambda(z)$. Es sei $|\lambda(z)| < L$ in einer Umgebung von z_0, dann ist daselbst

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| < L\,|z - z_0|^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{12}$$

Die Größe L hängt nur von der genannten Umgebung von z_0, nicht aber von z ab[9]).

[8]) W. F. Osgood and E. H. Taylor, Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition, Transactions of the American Mathematical Society **14** (1913), S. 227–298. Vgl. insbesondere S. 282–283. Bezüglich weiterer Literatur vgl. den Enzyklopädieartikel von L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Leipzig, B. G. Teubner 1919. Vgl. S. 255.

[9]) Man könnte die Ungleichung (12) auch aus einem Satz des Herrn Lichtenstein herleiten (vgl. a. a. O. [8]) S. 255, Fußnote 272, Journal für Mathematik **140**, 1910, S. 100–119).

§ 2.

Obere Abschätzung von ω_n.

Die Kurve Γ sei denselben Bedingungen unterworfen wie in § 1 und bezeichne einen Randpunkt von Γ, in welchem der Außenwinkel gleich ist; es sei $\alpha > 0$. Wenn $f(z)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades , das auf Γ der Ungleichung

$$|f(z)| \leqq 1$$

nügt, dann ist

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{1}{\varrho} \operatorname*{Max}_{|z-z_0| \leqq \varrho} |f(z)|,$$

obei $\varrho > 0$. Nun ist nach (9) und (12), wenn $|z - z_0| \leqq \varrho$, ϱ genügend ein, und z außerhalb von Γ gelegen ist,

$$|f(z)| \leqq |\psi(z)|^n = \left|1 + \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{\psi(z_0)}\right|^n < \left(1 + L\varrho^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n < e^{Ln\varrho^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

a $e^{Ln\varrho^{\frac{1}{\alpha}}} > 1$, so gilt diese Ungleichung in der ganzen Kreisscheibe $- z_0| \leqq \varrho$. Es ist also

$$|f'(z_0)| < \frac{1}{\varrho} e^{Ln\varrho^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Wir erhalten hier die günstigste Abschätzung, wenn wir $\varrho = \left(\frac{\alpha}{Ln}\right)^\alpha$ setzen, as für genügend große n stets erlaubt ist. Es ergibt sich dann

13) $$|f'(z_0)| < \left(\frac{eL}{\alpha}\right)^\alpha n^\alpha, \quad \text{d. h.} \quad \omega_n < An^\alpha,$$

obei $A = \left(\frac{eL}{\alpha}\right)^\alpha$ von n frei ist und nur von den Eigenschaften der Kurve Γ der Umgebung von z_0 abhängt.

Beispiele. Aus dem Vorhergehenden folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n}{n^\alpha} \leqq \left(\frac{eL_0}{\alpha}\right)^\alpha,$$

enn

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\psi(z) - \psi(z_0)|}{|z - z_0|^{\frac{1}{\alpha}}} = L_0$$

t, wobei die Annäherung von z an z_0 außerhalb von Γ geschieht.

Im Falle, wenn Γ der Einheitskreis, $|z_0| = 1$, ist, liefert dieses rgebnis

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n}{n} \leqq e.$$

In Wirklichkeit ist $\omega_n = n$.)

Im Falle, wenn Γ das reelle Intervall $-1, 1$ und $-1 < z_0 < 1$ ist, so ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n}{n} \leqq \frac{e}{\sqrt{1-z_0^2}}.$$

$\left(\text{In Wirklichkeit ist } \omega_n \leqq \frac{n}{\sqrt{1-z_0^2}}.\right)$ Ist ferner $z_0 = \pm 1$, dann ist $L_0 = \sqrt{2}$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n}{n^2} \leqq \frac{e^2}{2}.$$

(In Wirklichkeit ist $\omega_n = n^2$.)

Bemerkung. In dem Falle, wo der Außenwinkel von Γ in z_0 kleiner ist als 2π, kann die Anwendung des Satzes (11) durch folgende Bemerkung erspart werden. Es gibt eine einfache geschlossene Kurve Γ' von folgender Beschaffenheit:

a) Γ' ist von endlich vielen Kreisbögen begrenzt, die verlängert, sämtlich durch einen von z_0 verschiedenen Punkt hindurchgehen.

b) Γ' liegt in Γ (sie kann mit Γ Punkte bzw. Bögen gemeinsam haben).

c) Γ' hat z_0 als Randpunkt und der Außenwinkel von Γ' in z_0 beträgt $\alpha\pi$, ebenso wie bei Γ.

Zur Konstruktion von Γ' zeichne man zunächst zwei genügend kleine Kreisbögen, die beide von z_0 ausgehen, im Innern von Γ verlaufen, und die beiden, in z_0 zusammenlaufenden Bögen von Γ berühren. Ihr zweiter Schnittpunkt möge P heißen. Durch eine lineare Transformation, welche P in den unendlich fernen Punkt wirft, gehen die beiden eben konstruierten Kreisbögen in Geradenstücke über, die im Innern (oder außerhalb, je nach der Lage von P) der Bildkurve von Γ liegen. Man ergänze sie zu einem geschlossenen, sich nirgends durchschneidenden Polygon, das die erwähnte Bildkurve niemals zum zweitenmal durchschneidet. Durch Anwendung der zur vorigen inversen linearen Transformation gelangt man zu Γ' zurück.

Nun folgt aus der Definition der Zahlen ω_n unmittelbar (vgl. Einleitung), daß ω_n gewiß vergrößert wird, wenn man anstatt Γ die Kurve Γ' betrachtet. Bei Γ' kann ähnlich geschlossen werden, wie oben, mit dem Unterschied, daß hier die Abbildungsfunktion mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen Formeln in expliziter Form darstellbar ist, woraus ihre hier benutzte Eigenschaft (12) unmittelbar abzulesen ist.

§ 3.

Untere Abschätzung vom ω_n.

Etwas schwieriger ist es, unter denselben Voraussetzungen wie in § 2, ie untere Schranke für ω_n zu gewinnen, die ebenfalls von der Größenlnung n^α ist. Wir werden zeigen, daß die zur Kurve Γ gehörigen berschen Polynome $f_n(z)$ tatsächlich dieses Ergebnis liefern. Da in r bisherigen Literatur die hier gebrauchten Eigenschaften von $f_n(z)$ nur ter der Voraussetzung bewiesen worden sind, daß die Kurve Γ anatisch ist, so müssen wir diese Polynome zunächst einer eingehenden ntersuchung unterwerfen, die vielleicht auch an sich von Interesse ist.

Ich erinnere zunächst an die Definition von $f_n(z)$.[10]) Hat die unktion $w = \psi(z)$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, dann fängt die nach nehmenden Potenzen von z geordnete Laurentreihe von $(\psi(z))^n$ mit nem Polynom n-ten Grades, dem n-ten Faberschen Polynom $f_n(z)$ an[11]):

$$(\psi(z))^n = f_n(z) + \left(\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

ieraus folgt

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{(\psi(Z))^n}{Z-z}\,dZ,$$

o die Integration längs einer beliebigen, Γ umschließenden Kurve Γ_1 n positiven Sinne zu erstrecken ist und z im Innern von Γ_1 liegt. Beeichnet also $z = \varphi(w)$ die inverse Funktion von $w = \psi(z)$, dann ist

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{W^n \varphi'(W)}{\varphi(W) - \varphi(w)}\,dW,$$

ie Integration längs eines Kreises $|W| = R$, $R > 1$, im positiven Sinne rstreckt. Hierbei ist zunächst $1 < |w| < R$ vorauszusetzen; da jedoch ie Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$, wie bekannt, im abgeschlossenen Kreisußern $|w| \geqq 1$ stetig ist und dieses ein-eindeutig auf das abgeschlossene ußere von Γ abbildet, so kann in (15) auch $|w| = 1$, z auf Γ, vorausesetzt werden.

(15) läßt sich auch folgendermaßen deuten. Es sei w ein fester Vert, $|w| = 1$, $z = \varphi(w)$. Die Funktion von W

$$\Phi(W) = \log\frac{\varphi(W) - \varphi(w)}{W - w}, \qquad \Phi(\infty) = \log\frac{1}{c} = \text{reelle Zahl},$$

[10]) G. Faber, Über polynomische Entwicklungen, I, Math. Annalen 57 (1903), . 389—408.

[11]) Mit $((x))$ sei eine Potenzreihe in x ohne Absolutglied bezeichnet.

ist regulär für $|W|>1$ und stetig für $|W|\geqq 1$, abgesehen von $W=w$. Es ist für $|W|>1$

$$\Phi'(W)=\frac{\varphi'(W)}{\varphi(W)-\varphi(w)}-\frac{1}{W-w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(z)-w^n}{W^{n+1}} \tag{16}$$

und

$$\Phi(W)=\log\frac{1}{c}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n-f_n(z)}{n\,W^n}. \tag{17}$$

1. Ich beweise nun folgende Eigenschaft der eben definierten Polynome $f_n(z)$.

Es gilt gleichmäßig auf der Kurve Γ

$$|f_n(z)|<M \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{18}$$

wobei die Zahl M nur von Γ abhängt.

Ich betrachte nämlich die harmonische Funktion

$$\Im\Phi(W)=\Im\log\frac{\varphi(W)-\varphi(w)}{W-w},\quad \Im\Phi(\infty)=0.$$

Sie ist regulär für $|W|>1$ und stetig für $|W|=1$, abgesehen vom Punkte $W=w$, in dessen Umgebung sie jedoch beschränkt bleibt, sie ist ferner von beschränkter Schwankung für $|W|=1$. In der Tat hat die Bildkurve Γ folgende Eigenschaft:

Es sei P_0 ein *fester* und P ein *variabler* Punkt von Γ und man betrachte die stetig variierende Amplitude des Vektors P_0P, während P die Kurve in einem bestimmten Sinne durchläuft. Diese Amplitude besitzt eine wohlbestimmte *Schwankung* (Summe der positiv genommenen Änderungen), die von P_0 abhängt und mit $V(P_0)$ bezeichnet sei. Die Größe $V(P_0)$ ist in jedem Randpunkt P_0 endlich; sie hat eine endliche obere Grenze V, wenn P_0 die ganze Kurve durchläuft[12]).

[12]) Die Gesamtänderung der fraglichen Amplitude P_0P, während P längs Γ von P_0 bis P_0 läuft, kann zu $V(P_0)$ hinzugerechnet werden oder nicht. Wenn man sie zu $V(P_0)$ *nicht* hinzurechnet (was für die Endlichkeit von V offenbar belanglos ist), dann ist

$$V(P_0)=\int_{\Gamma}|\,d\arc P_0P\,|=\int_{\Gamma}\frac{ds\,|\sin\varphi\,|}{r},$$

wo ds das Bogenelement und φ den Winkel zwischen $P_0P=r$ und der Tangente in P bezeichnet. Letztere Darstellung verliert nur dann ihren Sinn, wenn P_0 sich auf einem schlitzartigen Teile der Randkurve Γ befindet.

Man zeigt nun folgende Eigenschaft der Funktion $V(P_0)$, indem man sich auf eine Umgebung von Γ_0 beschränkt, in der $\arc P_0P$ auf beiden Seiten von P_0 sich monoton ändert: Sie ist stetig auf Γ, bis auf die Eckpunkte, hier stimmen die beiden Grenzwerte der Funktion bei der Annäherung von beiden Seiten an P_0 mit-

Hieraus folgt, daß die Randfunktion

$$h(\theta) = \Im \log \frac{\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(w)}{e^{i\theta} - w},$$

übrigens bis auf einen einzigen Punkt stetig ist, eine beschränkte hwankung hat. Es sei

$$\frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (k_n \cos n\theta + l_n \sin n\theta)$$

Fouriersche Reihe von $h(\theta)$, dann ist bekanntlich

$$|k_n| < \frac{D}{n}, \quad |l_n| < \frac{D}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

bei D eine feste, von n und w unabhängige Zahl bezeichnet. Nun hält man wegen der oben genannten Eigenschaften der harmonischen nktion $\Im \Phi(W)$ die Fouriersche Reihe ihrer Randfunktion $h(\theta)$, in- m man in der Potenzreihe von $\Phi(W)$ formal $W = e^{i\theta}$ setzt und den aginären Teil abspaltet:

$$k_n \cos n\theta + l_n \sin n\theta = \Im \frac{w^n - f_n(z)}{n} e^{-in\theta} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

eraus folgt:

$$\left| \frac{w^n - f_n(z)}{n} \right| = \sqrt{k_n^2 + l_n^2} < \sqrt{2}\,\frac{D}{n},$$

9)

$$|f_n(z)| < 1 + \sqrt{2}\,D.$$

2. Um zu der eingangs erwähnten unteren Abschätzung von ω_n zu langen, genügt es dieselbe nach einer in der Einleitung gemachten (in 2 bereits benutzten) Bemerkung für eine, Γ enthaltende Kurve Γ' zu mitteln. In der Tat nimmt die Zahl ω_n beim Übergang von Γ auf Γ' . Wir wählen nun Γ' folgendermaßen:

a) Γ' ist von endlich vielen Kreisbögen begrenzt, die verlängert, mtlich durch einen von z_0 verschiedenen Punkt hindurchgehen.

b) Γ' enthält Γ (sie kann mit Γ Punkte bzw. Bögen gemeinsam ben).

c) z_0 ist ein Randpunkt von Γ' und der Außenwinkel von Γ' in z_0 be- ägt $\alpha\pi$, ebenso wie bei Γ.

Sobald $\alpha > 0$, ist diese Konstruktion stets möglich. Man kann somit n vornherein annehmen, daß Γ selbst ein Kreisbogenpolygon ist, dessen iten verlängert, sämtlich durch einen Punkt hindurchgehen. Es sei z_0

---

nander überein und übertreffen den Funktionswert in P_0 um $|1-\alpha|\pi$, wenn $\alpha\pi$ r Außenwinkel von Γ in P_0 ist. (Eine Ausnahme bildet bloß der Fall, wo P_0 mit nem Schlitzendpunkt zusammenfällt. Dann ist die Funktion stetig in P_0.)

ein Randpunkt von Γ mit dem Außenwinkel $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leqq 2$. Dann folgt aus den Schwarz-Christoffelschen Formeln, daß die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ in der Umgebung des Punktes w_0, $|w_0| = 1$, der bei der Abbildung in z_0 übergeht, folgende Eigenschaft besitzt. Es ist

$$\varphi(W) - \varphi(w_0) = \int_{w_0}^{W} (W - w_0)^{\alpha-1} \mathfrak{P}(W - w_0)\, dW,$$

wobei $\mathfrak{P}$, wie auch im folgenden $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$, eine Potenzreihe bezeichnet, die für genügend kleine Beträge des Argumentes konvergiert, deren Absolutglied ferner von 0 verschieden ist. Hieraus folgt

$$\varphi(W) - \varphi(w_0) = (W - w_0)^{\alpha} \mathfrak{P}_1(W - w_0). \tag{20}$$

Man erhält nun aus (14), (15)

$$f_n'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(\psi(Z))^n}{(Z - z_0)^2} dZ = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{W^n \varphi'(W)}{(\varphi(W) - \varphi(w_0))^2} dW$$

die Integration im zweiten Integral längs eines Kreises $|W| = R$, $R > 1$, im ersten längs des Bildes desselben, im positiven Sinne erstreckt. Ich ziehe nun die Integrationskurve des zweiten Integrals auf ein Kreisbogenzweieck zusammen: Der eine Bogen γ_1 desselben verläuft außerhalb des Einheitskreises und verbindet zwei Punkte w_1 und w_2 desselben, die w_0 einschließen und so nahe an w_0 liegen, daß auf γ_1 die Darstellung (20) mit gleichmäßig konvergierendem $\mathfrak{P}_1$ gilt. Der andere Bogen γ_2 ist derjenige Bogen $w_1 w_2$ des Einheitskreises, der w_0 nicht enthält. Das über γ_2 erstreckte Integral bleibt nun beschränkt für $n \to \infty$. Es handelt sich also nur um

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{W^n}{(W - w_0)^{\alpha+1}} \mathfrak{P}_2(W - w_0)\, dW = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{W^n}{\left(1 - \frac{w_0}{W}\right)^{\alpha+1}} \mathfrak{P}_3(W - w_0)\, d \tag{21}$$

Setzt man nun für $\mathfrak{P}_3$ die Entwicklung

$$\mathfrak{P}_3(W - w_0) = b_0 + b_1(W - w_0) + b_2(W - w_0)^2 + \cdots \qquad (b_0 \neq 0)$$

ein, so kommt es offenbar nur auf die drei ersten Glieder

$$\frac{b_0}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{W^n}{\left(1 - \frac{w_0}{W}\right)^{\alpha+1}} dW + \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{W^{n+1}}{\left(1 - \frac{w_0}{W}\right)^{\alpha}} dW + \frac{b_2}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{W^{n+2}}{\left(1 - \frac{w_0}{W}\right)^{\alpha-1}} dW$$

an. Der Rest liefert nämlich ein Integral, das, nachdem die Integrationslinie auf den Bogen $w_1 w_2$ des Einheitskreises reduziert wird, absolut konvergiert und für $n \to \infty$ beschränkt bleibt.

Es genügt nun von dem ersten Glied zu zeigen, daß es von der ößenordnung n^α ist. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{W^n}{\left(1-\frac{w_0}{W}\right)^{\alpha+1}}dW=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{W^n}{\left(1-\frac{w_0}{W}\right)^{\alpha+1}}dW+O(1),$$

s Integral rechts längs eines Kreises $|w|=R$, $R>1$, im positiven nne erstreckt. Dieses Integral ist gleich

$$\binom{\alpha+n+1}{n+1}w_0^{n+1}\sim\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}w_0^{n+1}.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{n^\alpha}>0.$$

§ 4.

Allgemeinere Fälle.

Wir stellen uns nun die Frage, mit welcher Intensität die in der inleitung definierte Folge ω_n bei einer beliebigen Menge ins Unendliche achsen kann. In dieser Richtung sollen zwei Sätze bewiesen werden.

I. *Die Folge*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$$

ann, selbst in gewissen Randpunkten einer stückweise analytischen Kurve, eliebig langsam anwachsen, Genauer: Wenn Ω_n eine beliebige ins Unndliche wachsende Folge von positiven Zahlen ist, dann gibt es eine Kurve Γ derart, daß die zu Γ und zu einem Randpunkt z_0 von Γ geörigen Zahlen ω_n von einem gewissen n ab die Ungleichung

22) $$\omega_n<\Omega_n$$

rfüllen.

Um den zweiten Satz zu formulieren, will ich in einigen Worten an ie Ergebnisse der a. a. O.[2]) zitierten Arbeit erinnern. Hier hat Herr ekete bewiesen, daß unter μ_n die in der Einleitung definierten Zahlen erstanden, für eine beliebige Menge M

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mu_n}=\mu$$

xistiert. Die Zahl μ, deren von mir a. a. O.[3]) bewiesene potentialtheoretische Bedeutung später beim Beweis von II. zur Sprache kommen wird, ennt Herr Fekete den transfiniten Durchmesser der fraglichen Menge.

II. *Es sei M eine beliebige beschränkte und abgeschlossene Punktmenge, deren transfinierter Durchmesser positiv ist. Bezeichnet z_0 einen*

beliebigen Punkt, so gibt es eine Zahl R, $R>1$, derart, daß die zu M und z_0 gehörigen Zahlen ω_n für genügend großes n die Ungleichung

$$\omega_n < R^n \tag{23}$$

erfüllen.

Beweis von I. Die fragliche Kurve Γ konstruieren wir durch Angabe ihrer Gleichung in Polarkoordinaten

$$\varrho = \varrho(\varphi).$$

Hierbei sei $\varrho(\varphi)$ stetig für $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ und wachse daselbst monoton von 0 bis zu einem gewissen positiven Wert $\varrho\left(\frac{\pi}{2}\right)$; ferner sei $\varrho(\varphi) = \varrho\left(\frac{\pi}{2}\right)$ für $\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \pi$. Wir setzen außerdem $\varrho(-\varphi) = \varrho(\varphi)$. Über das Nullwerden der Funktion $\varrho(\varphi)$ für $\varphi \to 0$ werden wir noch später verfügen. Es sei $z_0 = 0$.

Wir wollen ω_n auf eine ähnliche Weise abschätzen wie in § 1. Es sei Γ_R das Bild des Kreises $|w| = R$, $R>1$, bei der Abbildung des Äußeren von Γ auf $|w|>1$. Es sei ferner $d(R)$ die *Minimaldistanz* von Γ_R vom Punkte $z_0 = 0$. Dann ist $d(R)$ eine zugleich mit R abnehmende positive stetige Funktion, es ist ferner $\lim_{R \to 1} d(R) = 0$. Wir schließen ähnlich wie in § 1, daß

$$\omega_n < \frac{R^n}{d(R)}. \tag{24}$$

Wir wählen hier für R, $R>1$, eine Funktion von n, die mit wachsendem n abnehmend gegen 1 konvergiert.

Es sei nun Γ^* eine in Γ enthaltene Kurve, die gleichfalls durch $z_0 = 0$ hindurchgeht, und $d^*(R)$ habe eine ähnliche Bedeutung für Γ^* als $d(R)$ für Γ. Dann ist

$$d^*(R) \leqq d(R)$$

für alle Werte von R, $R>1$. In der Tat, wenn $\psi(z)$ bzw. $\psi^*(z)$ die wie in § 1 normierten Abbildungsfunktionen von Γ bzw. Γ^* bezeichnen, dann ist

$$h(z) = \frac{\psi(z)}{\psi^*(z)}$$

regulär außerhalb und stetig auf Γ; es ist ferner

$$|h(z)| = \left|\frac{\psi(z)}{\psi^*(z)}\right| = \frac{1}{|\psi^*(z)|} \leqq 1,$$

wenn z auf Γ liegt. Hieraus folgt, daß diese Ungleichung für alle z außerhalb von Γ gilt; angewandt auf die Punkte Γ_R liefert sie

$$R \leqq |\psi^*(z)|,$$

h. das Bild von $|w| = R$ bei der Abbildung $w = \psi^*(z)$ (die Kurve Γ_R^*)
gt ganz in Γ_R, woraus die Behauptung folgt.

Für Γ^* wählen wir einen Kreissektor um $z_0 = 0$ vom Radius $\varrho = \varrho(\varphi)$;
seine Punkte gelte $|\arc z| \geqq \varphi$, φ fest, $0 < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Die Größe $d^*(R)$
ßt sich dann folgendermaßen ermitteln. Es sei der spezielle Kreissektor
den Nullpunkt betrachtet, dessen Radius gleich 1 ist und dessen Punkte
Ungleichung $|\arc z| \geqq \varphi$ erfüllen. Bei der Abbildung seines Außen-
bietes auf $|w| > 1$ erhält man eine Schar von Kreisbildern, und es sei
$R, \varphi)$ die Minimaldistanz des Bildes $|w| = R$ vom Nullpunkt. Dann ist

$$d^*(R) = \varrho(\varphi)\,\delta(R, \varphi).$$

gilt also nach (24)

$$\omega_n < \frac{R^n}{d^*(R)} = \frac{R^n}{\varrho(\varphi)\,\delta(R, \varphi)}.$$

Die Funktion $\delta(R, \varphi)$, definiert für $R > 1$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, hat einige
fache Eigenschaften:

a) $\delta(R, \varphi)$ ist stetig in beiden Variabeln;

b) $\delta(R, \varphi)$ nimmt mit abnehmendem φ und wachsendem R zu;

c) $\lim_{\varphi \to 0} \delta(R, \varphi) = R$, $\lim_{R \to 1} \delta(R, \varphi) = 0$.

Es sei nun $R = R(n)$ eine stetige Funktion der stetigen Variablen n,
> 0, und sie konvergiere mit wachsendem n abnehmend gegen 1; es
ferner R^n endlich für alle n. Man kann z. B. $R = 1 + \frac{1}{n}$ setzen. Zu
dem R bestimmen wir φ vermöge der Relation

$$\delta(R, \varphi) = 1,$$

as für genügend große n wegen a), b), c) stets möglich ist. Die so be-
immten φ-Werte konvergieren gegen 0, wenn $n \to \infty$, bzw. $R \to 1$.
chließlich wählen wir $\varrho(\varphi)$ so, daß

$$\varrho(\varphi) > \frac{R^n}{\omega_n}.$$

er rechtsstehende Ausdruck konvergiert hier gegen 0. so daß die Be-
immung einer Funktion $\varrho(\varphi)$, die außerdem noch die oben angegebenen
genschaften besitzt, möglich ist. Hieraus folgt (22).

Beweis von II. Es sei $\mathfrak{G}$ derjenige zusammenhängende Teil des
omplementes von M, der den unendlich fernen Punkt enthält. A. a. O. [3])
be ich bewiesen, daß der transfinite Durchmesser μ von M dann und
r dann positiv ist, wenn dieses Gebiet $\mathfrak{G}$ eine „Greensche Funktion"
sitzt in dem folgenden Sinne. Es sei $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k, \ldots$ eine Folge
sammenhängender, von endlich vielen analytischen Bögen begrenzter

Gebiete, von denen jedes im folgenden enthalten ist und das erste den unendlich fernen Punkt enthält. Es sei G_k die zu dem unendlich fernen Punkt als Aufpunkt gehörige Greensche Funktion von $\mathfrak{G}_k$; sie ist in $\mathfrak{G}_k$ regulär harmonisch bis auf den unendlich fernen Punkt, in dessen Umgebung sie die Form hat: $\log\frac{1}{r}+$ eine reguläre harmonische Funktion; sie verschwindet ferner auf dem Rand von $\mathfrak{G}_k$. Der transfinite Durchmesser μ von M ist nun dann und nur dann positiv, wenn der notwendig existierende Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} G_k = G$$

nicht identisch $=+\infty$ ist. Dann ist G eine in $\mathfrak{G}$ reguläre harmonische Funktion, mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes, in dessen Umgebung sie sich ähnlich verhält, wie die Funktionen G_k.

Es sei jetzt für ein beliebiges Polynom n-ten Grades $f(z)$ auf der Menge M die Ungleichung

$$|f(z)| \leqq 1$$

erfüllt, dann ist, behaupte ich, in $\mathfrak{G}$

$$|f(z)| \leqq e^{nG}, \tag{25}$$

wo G die oben erklärte Greensche Funktion bezeichnet.

Diese Ungleichung stellt eine Verallgemeinerung des ersten Hilfssatzes von § 1 dar. Sie kann ähnlich bewiesen werden wie jener Hilfssatz, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{G}$ von endlich vielen analytischen Bögen begrenzt ist, wie dies z. B. für die Gebiete $\mathfrak{G}_k$ der Fall ist. Für $\mathfrak{G}$ folgt dieselbe Ungleichung allgemein durch Grenzübergang. Es sei ferner bemerkt, daß in (25) rechts stets eine Zahl >1 gilt, daß ferner in denjenigen Punkten des Komplements von M, die $\mathfrak{G}$ nicht angehören, stets $|f(z)| \leqq 1$ gilt[13]).

Aus (25) folgt nun, daß zu einer beliebigen, die Menge M enthaltenden Kreisscheibe eine Zahl A, $A>1$, existiert, derart, daß wenn ein Polynom n-ten Grades $f(z)$ auf M die Ungleichung $|f(z)| \leqq 1$ erfüllt, dasselbe auf der besagten Kreisscheibe $|f(z)| \leqq A^n$ erfüllt. Hieraus ergibt sich (23) unmittelbar[14]).

---

[13]) Vgl. die Fußnote [5]) a. a. O. [3]).

[14]) Es ist auch ohne diese Betrachtungen direkt einzusehen, daß (23) stets gilt, wenn M eine beliebig kleine Kreisscheibe oder ein beliebig kleines Intervall enthält. Man beachte nämlich (8) und die Tatsache, daß für eine Kreisscheibe oder ein Intervall (23) gilt.

§ 5.

Ein Spezialfall mit $\alpha = 0$.

Um den Satz, den wir am Schluß der Einleitung ausgesprochen haben, beweisen, betrachten wir die Kurve Γ, welche aus den beiden Kreisen

$$|z+1| = 1, \qquad |z-1| = 1$$

steht. Das Äußere von Γ wird durch die Funktion

$$w = \psi(z) = i\,\frac{1+e^{-\frac{i\pi}{z}}}{1-e^{-\frac{i\pi}{z}}} \tag{6}$$

$|w| > 1$ übergeführt. Der unendlich ferne Punkt und die Richtung nes Linienelementes in ihm bleiben hierbei unverändert. Der Punkt $= 0$ am „oberen“ Ufer von Γ geht in $w = i$, der Punkt $z = 0$ am nteren“ Ufer von Γ in $w = -i$ über.

Es sei $0 < \varrho < 2$; wir betrachten die Punkte z mit $|z| = \varrho$, welche ußerhalb von Γ in der *oberen* Halbebene liegen. Dann ist

$$\left| e^{-\frac{i\pi}{z}} \right| = e^{-\frac{\pi}{\varrho^2}\Im z}.$$

as Minimum von $\Im z$ ergibt sich zu $\varrho\sqrt{1-\frac{\varrho^2}{4}}$. Es ist somit für die aglichen z

$$|w-i| = 2\left|\frac{e^{-\frac{i\pi}{z}}}{1-e^{-\frac{i\pi}{z}}}\right| \leqq \frac{2e^{-\frac{\pi}{\varrho}\sqrt{1-\frac{\varrho^2}{4}}}}{1-e^{-\frac{\pi}{\varrho}\sqrt{1-\frac{\varrho^2}{4}}}} \sim 2e^{-\frac{\pi}{\varrho}\sqrt{1-\frac{\varrho^2}{4}}},$$

enn $\varrho \to 0$. Man erhält eine ähnliche Abschätzung für $|w+i|$, wenn $z| = \varrho$ und z außerhalb von Γ in der *unteren* Halbebene liegt. Hieraus gibt sich nach der Methode von § 2, indem man $\varrho = \frac{\pi}{\log n}$ setzt, das ewünschte Resultat.

(Eingegangen am 20. Juli 1924.)

Über die Annäherung analytischer Funktionen.

Von

Yoshitomo Okada in Sendai, Japan.

In neuerer Zeit findet man in der Literatur eine große Anzahl von Untersuchungen über das Problem der Konvergenz (für $x \to +\infty$) einer Funktion der Form

$$\Sigma s_n a_n(x) \text{ mit } s_n = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} \quad \text{oder} \quad \Sigma b_n(x) c_n z^n$$

in einem Bereich der z-Ebene gegen die durch geradlinige analytische Fortsetzung eines Elementes $\Sigma c_n z^n$ vom Nullpunkt her definierte Funktion. Hier möchte ich in einer allgemeinen Betrachtung dasselbe Problem untersuchen, woraus man dann einige bekannte Resultate als spezielle Fälle herleiten kann.

§ 1.

Definitionen.

1. Es sei $\psi(\theta)$ eine reelle periodische Funktion mit der Periode 2π, welche eine der folgenden Bedingungen (A), (B) erfüllt:

(A) Im Intervall $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ ist $\psi(\theta)$ eindeutig, positiv und stetig; es ist $\psi(0) = 1$.

(B) Im Intervall $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ ist $\psi(\theta)$ nur für die Teilintervalle $0 \leqq \theta < \theta_1, \quad \theta_1' < \theta < \theta_2, \ldots, \quad \theta_j' < \theta \leqq 2\pi$ definiert, wobei $\theta_i \leqq \theta_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ ist, derart, daß $\psi(\theta)$ in diesen Intervallen eindeutig, positiv und stetig ist, und daß $\psi(\theta_i - 0) = +\infty$, $\psi(\theta_i' + 0) = +\infty$ und $\psi(0) = 1$.

Dann bezeichnet man mit $D(\psi)$ den (endlichen oder unendlichen) Bereich, welcher den Nullpunkt in seinem Innern enthält und durch die Kurve mit der Polargleichung $r = \psi(\theta)$ begrenzt wird.

2. Es sei ζ der erste auf einem Halbstrahl bei der analytischen Fortsetzung einer beliebigen Potenzreihe $f(z) = \Sigma c_n z^n$ mit positivem Kon-

genzradius vom Nullpunkt aus längs dieses Strahles her angetroffene guläre Punkt. Dann ist der Punkt ζ, wie bekannt, ein Randpunkt bei n Mittag-Lefflerschen Stern des Elementes $f(z) = \Sigma c_n z^n$.

Für eine solche Ecke $\zeta = \varrho e^{i\varphi}$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ betrachten wir den dlichen oder unendlichen) Bereich, welcher den Nullpunkt in seinem ern enthält und durch die Kurve $r = \varrho\,\psi(\theta - \varphi)$ begrenzt wird. n bezeichnet dann den Durchschnitt solcher Bereiche für alle Ecken $= \varrho e^{i\varphi}$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ mit $D(f, \psi)$.

3. Es seien $a_n(x)$ und $b_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, zwei Folgen von Funkhen einer reellen Variablen x, wobei x jeden positiven Wert oder nur en ganzzahligen positiven Wert annimmt. Erhält man dann

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n a_n(x) = \lim_{n=\infty} \sigma_n$$

jede konvergente Folge σ_n, so heißt $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *eine summatorie Folge erster Art*; und erhält man

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

jede konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, so heißt $b_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *eine nmatorische Folge zweiter Art.*

§ 2.

Näherungsfunktionen der Form $\Sigma s_n a_n(x)$.

4. Nun wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz I. *Es sei $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge derart, daß x jeden itiven Wert oder nur jeden positiven ganzzahligen Wert annimmt, l daß für alle $x \geqq X > 0$*

$$\Phi(z, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) z^n$$

enzreihen von z sind, deren Konvergenzradien nicht kleiner als eine isse Zahl R sind; es möge $R > 1$ sein. Damit dann, wenn

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n a_n(x) \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$$

etzt wird und $F(z)$ die durch geradlinige analytische Fortsetzung des mentes $f(z) = \Sigma c_n z^n$ vom Nullpunkt her definierte Funktion bedeutet, einen gewissen Bereich $D(\psi)$ im Kreis $|z| \leqq R$ und für jede Potenzhe $f(z) = \Sigma c_n z^n$ mit positivem Konvergenzradius die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} S_f(x) = F(z)$$

gleichmäßig gelte in jedem ganz im Innern von $D(f, \psi)$ gelegenen, abgeschlossenen Bereich, ist notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) *Es ist*

$$\lim_{x=\infty} \Phi(1, x) = 1.$$

(b) *Es gilt*

$$\lim_{x=\infty} \Phi(z, x) = 0$$

gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $D(\psi)$ gelegenen, abgeschlossenen Bereich.

Beweis. Diese Bedingungen sind notwendig. Um das zu beweisen, setze man

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots,$$

dann erhält man

$$F(z) = \frac{1}{1-z},$$

$$D(f, \psi) = D(\psi),$$

$$S_f(x) = a_1(x) + a_2(x)(1+z) + a_3(x)(1+z+z^2) + \ldots.$$

Da nun $D(f, \psi)$ den Nullpunkt im Innern enthält und ferner, in diesem Fall, für $z = 0$, $S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ist, so findet man, daß die Bedingung (a) notwendig ist.

Nun ergibt sich für alle $x \geqq X > 0$:

$$\frac{\Phi(1, x) - \Phi(z, x)}{1-z} = a_1(x) + a_2(x)(1+z) + a_3(x)(1+z+z^2) + \ldots = S_f(x)$$

innerhalb $D(\psi)$. Damit also

$$\lim_{x=\infty} S_f(x) = \frac{1}{1-z}$$

gleichmäßig in jedem innerhalb $D(f, \psi)$ gelegenen, abgeschlossenen Bereich gelte, muß, wegen (a) und $D(f, \psi) = D(\psi)$,

$$\lim_{x=\infty} \Phi(z, x) = 0$$

gleichmäßig in jedem innerhalb $D(\psi)$ gelegenen abgeschlossenen Bereich gelten. Somit ist auch die Bedingung (b) notwendig.

Die Bedingungen (a) und (b) sind auch hinreichend[1]). In der Tat sei $f(z) = \Sigma c_n z^n$ eine beliebige Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, und sei $\zeta' = \varrho' e^{i\varphi'}$ ein nicht zum Mittag-Lefflerschen Sterne des Elementes $f(z) = \Sigma c_n z^n$ gehöriger Punkt. Dann hat ζ' unter Be-

[1]) Um das zu beweisen, wende ich wesentlich eine Rademacher-Knoppsche Methode an. Siehe K. Knopp, Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 238–242.

zung einer passenden Ecke ζ die Form $\zeta' = x\zeta$ $(x \geqq 1)$. Also findet n der Definition von $D(\psi)$ gemäß, daß der Bereich, welcher den Nullkt enthält und durch die Kurve $r = x\varrho\psi(\theta - \varphi')$, d. h. $r = \varrho'\psi(\theta - \varphi')$ grenzt wird, $D(f, \psi)$ enthält. Liegt daher ein bestimmter Punkt $z = re^{i\Theta}$ Innern von $D(f, \psi)$, so ist für jeden nicht zum Sterne gehörigen nkt ζ'

$$r < \varrho'\psi(\theta - \varphi').^{3})$$

Ist also bei festem $z = re^{i\Theta}$ innerhalb $D(f, \psi)$

$$r \geqq r'\psi(\theta - \theta'),$$

ist $z' = r'e^{i\theta'}$ notwendig ein innerer Punkt des Sternes. Nun ist für en bestimmten inneren Punkt $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ von $D(f, \psi)$ und für jeden nkt $z' = r'e^{i\theta'}$ in dem durch die Kurve $C(z_0)$ mit der Gleichung $= \frac{r_0}{\psi(\theta_0 - \theta)}$ begrenzten Bereich

$$r_0 \geqq r'\psi(\theta_0 - \theta').$$

her muß jeder Punkt in dem durch $C(z_0)$ begrenzten Bereich ein zum erne gehöriger Punkt sein. Folglich existiert ein $\varepsilon_0 (> 0)$ derart, daß r durch die geschlossene Kurve $C'(z_0)$ mit der Gleichung $r = \frac{r}{\psi(\theta_0 - \theta)} + \varepsilon_0$ grenzte Bereich die Punkte 0 und z_0 in seinem Innern enthält, und daß e Punkte in diesem Bereich zum Sterne gehören. Da nun für einen liebigen Punkt $t = \sigma e^{i\tau}$ auf der Kurve $C'(z_0)$ $\frac{r_0}{\sigma} < \psi(\theta_0 - \tau)$ ist, so uß der Punkt $\frac{z_0}{t} = \frac{r_0}{\sigma} e^{i(\theta_0 - \tau)}$ ein innerer Punkt von $D(\psi)$ sein. Daher ot es für jeden innerhalb $D(f, \psi)$ gelegenen abgeschlossenen Bereich D_1 Innern von $D(\psi)$ einen abgeschlossenen Bereich D_2, welcher jeden nkt $\frac{z}{t}$ enthält, wobei z in D_1 und t auf $C'(z)$ liegt.

Nun ist für alle $x \geqq X > 0$ die Reihe

$$\frac{\Phi(1, x) - \Phi\left(\frac{z}{t}, x\right)}{1 - \frac{z}{t}} = a_1(x) + a_2(x)\left(1 + \frac{z}{t}\right) + a_3(x)\left(1 + \frac{z}{t} + \frac{z^2}{t^2}\right) + \cdots$$

eichmäßig konvergent für $\frac{z}{t}$ in D_2, weil D_2 im Innern von $D(\psi)$ liegt; nd $C'(z)$ umschließt insbesondere die Punkte 0 und z. Folglich erhält an für alle $x \geqq X' \geqq X > 0$ und für z in D_1:

---

[3]) Man möge im Fall, wo $\psi(\theta)$ die Bedingung (B) erfüllt, voraussetzen, daß r $\theta_i \leqq \theta \leqq \theta_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ $\psi(\theta) = \infty$ ist.

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{F(t)}{t\left(1-\frac{z}{t}\right)}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i\,\Phi(1,x)}\int_{C'}F(t)\left[\frac{a_1(x)}{t}+\frac{a_2(x)}{t}\left(1+\frac{z}{t}\right)+\frac{a_3(x)}{t}\left(1+\frac{z}{t}+\frac{z^2}{t^2}\right)+\ldots\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi i\,\Phi(1,x)}\int_{C'}F(t)\frac{\Phi\left(\frac{z}{t},x\right)}{t-z}dt$$

$$=\frac{1}{\Phi(1,x)}\left[\frac{a_1(x)}{2\pi i}\int_{C'}\frac{F(t)}{t}dt+\frac{a_2(x)}{2\pi i}\int_{C'}F(t)\left(\frac{1}{t}+\frac{z}{t^2}\right)dt\right.$$

$$\left.+\frac{a_3(x)}{2\pi i}\int_{C'}F(t)\left(\frac{1}{t}+\frac{z}{t^2}+\frac{z^2}{t^3}\right)dt+\ldots\right]+\frac{1}{2\pi i\,\Phi(1,x)}\int_{C'}F(t)\frac{\Phi\left(\frac{z}{t},x\right)}{t-z}dt$$

$$=\frac{1}{\Phi(1,x)}\sum_{n=1}^{\infty}s_n a_n(x)+\frac{1}{2\pi i\,\Phi(1,x)}\int_{C'}F(t)\frac{\Phi\left(\frac{z}{t},x\right)}{t-z}dt,$$

wobei $s_n=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_{n-1}z^{n-1}$ ist. Daher findet man, daß

$$\lim_{x=\infty}S_f(x)=\lim_{x=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}s_n a_n(x)=F(z)$$

gleichmäßig für z in D_1 innerhalb $D(f,\psi)$ gilt. Denn, da nach (a) $\lim\Phi(1,x)=1$ gilt, und da ferner nach (b) für z in D_2 $\lim\Phi(z,x)=0$ gleichmäßig gilt, so gilt

$$\lim_{x=\infty}\frac{1}{2\pi i\,\Phi(1,x)}\int_{C'}F(t)\frac{\Phi\left(\frac{z}{t},x\right)}{t-z}dt=0$$

gleichmäßig für z in D_1.

Also sind die Bedingungen (a) und (b) auch hinreichend.

Mit Hilfe von Satz I beweisen wir jetzt den folgenden

Satz II. *Es sei $a_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, eine summatorische Folge erster Art derart, daß x nur jeden positiven ganzzahligen Wert annimmt, und daß für jedes $x\geqq X>0$*

$$\Phi(z,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)z^n$$

eine ganze Funktion von z ist.

Wenn für jedes $x\geqq X>0$ und für alle z in einem gegebenen gewissen Bereich $D(\psi)$

$$|\Phi(z,x)|\leqq 1$$

so erhält man für jede Potenzreihe $f(z) = \Sigma c_n z^n$ *mit positivem Konenzradius die Beziehung*

$$\lim_{x=\infty} S_f(x) = F(z),$$

$S_f(x)$ *und* $F(z)$ *die in Satz* I *definierten Funktionen bedeuten, gleichßig in jedem ganz im Innern von* $D(f, \psi)$ *gelegenen, abgeschlossenen eich.*

Beweis. Da $a_n(x)$ eine summatorische Folge erster Art ist, so ersich:

$$\lim_{x=\infty} \Phi(1, x) = \lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n a_n(x) = 1,$$

em man $\sigma_n = 1$ setzt. Daher kann die Bedingung (a) in Satz I ert werden.

Nun bestimmen wir zu einem gewissen abgeschlossenen Bereich D erhalb $D(\psi)$ einen im Innern von $D(\psi)$ gelegenen endlichen Bereich D', daß D' in seinem Innern den Nullpunkt und D enthält. Dann findet n, da $\Phi(z, x)$ in D' regulär ist und $|\Phi(z, x)|$ für alle $x \geqq X > 0$ erhalb einer festen Schranke liegt, nach einem bekannten Satz von eltjes, daß $\Phi(z, x)$ in D gleichmäßig gegen eine daselbst reguläre lytische Funktion $\Phi(z)$ konvergiert. Aber, weil $a_n(x)$ eine summatohe Folge erster Art ist, so gilt $\lim \Phi(z, x) = 0$ für $|z| < 1$. Hiernach $\Phi(z) = 0$ identisch. Daher erhält man

$$\lim_{x=\infty} \Phi(z, x) = 0$$

chmäßig in D. Also ist die Bedingung (b) in Satz I erfüllt und der gelegte Satz bewiesen.

6. Bemerkung. Aus Satz I oder II kann man einige bekannte ultate von Borel[3]), Mittag-Leffler[4]), Knopp[5]) usw. herleiten. besondere findet man im Falle des ganzen Mittag-Lefflerschen rnes auch für eine ziemlich allgemeine Funktion der Form $\Sigma s_n a_n(x)$ dem Satz nahes Resultat bei P. Dienes, Leçons sur les singularités fonctions analytiques, Paris (1913), S. 100—114.

---

[3]) Leçon sur les séries divergentes, Paris (1901), S. 120—136.

[4]) „Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène Note)", Acta Math. 29 (1905), S. 101—182, besonders S. 166—172.

[5]) „Über das Eulersche Summierungsverfahren", Math. Zeitschr. 15 (1922), 26—253, besonders S. 237—242.

§ 3.

Näherungsfunktionen der Form $\Sigma b_n(x) c_n z^n$.

Nach Satz I kann man weiter den folgenden Satz beweisen:

Satz III. *Es sei* $b_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *eine Funktionenfolge derart, daß* x *jeden positiven Wert oder nur jeden positiven ganzzahligen Wert annimmt, und daß für jedes* $x \geqq X > 0$

$$\Psi(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) z^n$$

eine Potenzreihe von z *ist, deren Konvergenzradius nicht kleiner als* $R\ (>1)$ *ist. Damit dann, wenn* $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) c_n z^n$ *ist und* $F(z)$ *die in Satz* I *definierte Funktion bedeutet, für einen gewissen gegebenen Bereich* $D(\psi)$ *im Kreise* $|z| \leqq R$ *und für jede Potenzreihe* $f(z) = \Sigma c_n z^n$ *mit positivem Konvergenzradius die Beziehung*

$$\lim_{x=\infty} T_f(x) = F(z)$$

gleichmäßig gelte in jedem ganz im Innern von $D(f, \psi)$ *gelegenen abgeschlossenen Bereich, ist notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Es ist* $\lim_{x=\infty} b_0(x) = 1$;

(b) *Es gilt* $\lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}(x) - b_n(x)] z^n = 0$

gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $D(\psi)$ *gelegenen, abgeschlossenen Bereich.*

Beweis. Da der Konvergenzradius von $\Psi(z, x)$ für alle $x \geqq X >$ nicht kleiner als $R\ (>1)$ ist, so sieht man, wenn man

$$\Phi(z, x) = z\Psi(z, x) - [\Psi(z, x) - b_0(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}(x) - b_n(x)] z^n$$

setzt, daß der Konvergenzradius von $\Phi(z, x)$ für alle $x \geqq X > 0$ auch nicht kleiner als $R\ (>1)$ ist.

Nun folgt aus

$$\Phi(1, x) - \Phi(z, x) = (1 - z)\Psi(z, x)$$

für alle $x \geqq X > 0$

$$\Psi(z, x) = [b_0(x) - b_1(x)] + [b_1(x) - b_2(x)](1 + z) + [b_2(x) - b_3(x)](1 + z + z^2) + \ldots,$$

diese Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem im Innern von $D(\psi)$ genen abgeschlossenen Bereich, weil $D(\psi)$ im Kreise $|z| \leqq R$ liegt. er folgt für alle $x \geqq X > 0$, jeden Punkt z in jedem im Innern von $\psi)$ gelegenen Bereich D_1 und jede Potenzreihe $f(z) = \sum c_n z^n$ mit tivem Konvergenzradius aus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} F(t)\cdot \Psi\left(\frac{z}{t}, x\right)\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} F(t)\left[(b_0(x) - b_1(x))\frac{1}{t} + \left(b_1(x) - b_2(x)\right)\left(\frac{1}{t} + \frac{z}{t^2}\right)\right.$$

$$\left. + (b_2(x) - b_3(x))\left(\frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3}\right) + \ldots\right] dt,$$

ei $C'(z)$ die im Beweis von Satz I definierte Kurve ist, die Be- ung

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\, c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n [b_{n-1}(x) - b_n(x)].$$

it ist nach Satz I dafür, daß

$$\lim_{x=\infty} T_f(x) = \lim_{x=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\, c_n z^n = F(z)$$

chmäßig in D_1 gilt, notwendig und hinreichend, daß $\lim_{x=\infty} \Phi(1, x) = 1$ d. h. daß

$$\lim_{x=\infty} b_0(x) = 1$$

und daß außerdem

$$\lim_{x=\infty} \Phi(z, x) = 0, \text{ d. h. } \lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}(x) - b_n(x)]\, z^n = 0$$

und zwar gleichmäßig in jedem im Innern von $D(\psi)$ gelegenen eschlossenen Bereich.

Damit ist der vorgelegte Satz bewiesen.

8. Ebenso ergibt sich nach Satz II der folgende

Satz IV. *Es sei $b_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, eine summatorische Folge iter Art derart, daß x nur jeden positiven ganzzahligen Wert annimmt, daß für alle $x \geqq X > 0$*

$$\Psi(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) z^n$$

ganze Funktion von z ist.

Wenn für alle $x \geqq X > 0$ und für alle z in einem gewissen gegebenen eich $D(\psi)$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}(x) - b_n(x)]\, z^n \right| \leqq 1$$

gilt, so erhält man für jede Reihe $f(z) = \Sigma c_n z^n$ *mit positivem Konvergenz-radius die Beziehung:*

$$\lim_{x=\infty} T_f(x) = F(z),$$

wo $T_f(x)$ *und* $F(z)$ *die vorher definierten Funktionen bedeuten, gleichmäßig in jedem ganz im Innern von* $D(f, \psi)$ *gelegenen, abgeschlossenen Bereich.*

Beweis. Nach der Definition von $b_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, findet man, daß $b_{n-1}(x) - b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, eine summatorische Folge erster Art ist[6]), und daß für alle $x \geqq X > 0$

$$\Phi(z, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n-1}(x) - b_n(x)] z^n$$

eine ganze Funktion von z ist. Folglich findet man nach Satz II für einen gegebenen Bereich, in welchem für alle $x \geqq X > 0$

$$|\Phi(z, x)| \leqq 1$$

gilt, und für jede Potenzreihe $f(z) = \Sigma c_n z^n$ mit positivem Konvergenzradius, daß

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_n [b_{n-1}(x) - b_n(x)] = F(z)$$

gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $D(f, \psi)$ gelegenen abgeschlossenen Bereich D_1 gilt.

Da, wie aus dem Beweis von Satz III bekannt, für alle $x \geqq X >$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n [b_{n-1}(x) - b_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) c_n z^n$$

---

[6]) In der Tat folgt $\lim_{n=\infty} b_n(x) = 0$ für alle $x \geqq X > 0$, da $\Psi(z, x)$ für alle $x \geqq X > 0$ eine ganze Funktion ist. Folglich gilt für jede konvergente Folge σ_n, $n = 1, 2, \ldots$, und für alle $x \geqq X > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}(x)\,(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n [b_{n-1}(x) - b_n(x)],$$

wo $\sigma_0 = 0$ ist. Daher erhält man aus der Definition von $b_n(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n [b_{n-1}(x) - b_n(x)] &= \lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}(x)\,(\sigma_n - \sigma_{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \\ &= \lim_{n=\infty} \sigma_n. \end{aligned}$$

D_1 gilt, so folgt also

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) c_n z^n = F(z)$$

ichmäßig in D_1.

Somit ist der vorgelegte Satz bewiesen.

9. Bemerkung. Aus Satz III oder IV kann man einige bekannte sultate von Le Roy[7]), Perron[8]) usw. herleiten.

Sendai, Februar 1924.

---

[7]) „Sur les séries divergentes, usw.", Annales Fac. Sc. Toulouse (2) 2 (1900), 315—430, besonders S. 317—430.

[8]) „Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen", Math. Zeitschrift 6 (1920), 286—310, besonders S. 307—310; „Neue Summationsmethoden und Entwicklungen ch Polynomen", Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wissenschaften, ath.-naturw. Klasse, Abteilung A, Jahrgang 1922, 1. Abhandlung, besonders Sätze I, und IV.

(Eingegangen am 24. April 1924.)

Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

In der Potentialtheorie und ihren Anwendungen spielen die bekannten Sätze über das Newtonsche und logarithmische Potential einfacher und doppelter Belegungen eine hervorragende Rolle. Sie bilden das Fundament der Neumann-Fredholmschen Methode und der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Bei diesen Sätzen handelt es sich um Aussagen folgender Art. Es sei etwa ein mit einer Belegung stetiger Dichte $\mu = \mu(x, y, z)$ erfülltes beschränktes dreidimensionales Gebiet T, das ein bestimmtes Volumen im Sinne von Peano und Jordan hat, gegeben. Über die Natur der Begrenzung von T und der Ortsfunktion μ werden bestimmte spezielle Annahmen gemacht, — gefragt wird nach der Existenz und den Eigenschaften partieller Ableitungen des Potentials

$$(1) \qquad V(x, y, z) = \int_T \frac{1}{r} \mu' \, d\tau', \qquad \mu' = \mu(x', y', z'), \qquad d\tau' = dx' \, dy' \, dz',$$

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Es möge beispielsweise der Rand S von T aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier Flächen mit stetiger Normale bestehen, und es mögen überdies die Richtungskosinus der Normale eine Bedingung von der Form

$$(2) \qquad |\alpha_1 - \alpha_2|, \ |\beta_1 - \beta_2|, \ |\gamma_1 - \gamma_2| \leqq M_0 \, \delta_{12}^{\lambda} \quad (\lambda \text{ konstant}, \ 0 < \lambda < 1)$$

erfüllen. In (2) bezeichnen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungskosinus der Normale in den Punkten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) auf S; δ_{12} ist der Abstand der beiden Punkte. Ungleichheiten dieser Art sind in die Potentialtheorie von Herrn Hölder eingeführt worden und werden als Höldersche

lingungen[1]) bezeichnet. Genügt nun auch die Dichte einer analogen lingung:

$$|\mu(x_1, y_1, z_1) - \mu(x_2, y_2, z_2)| \leqq M_2 d_{12}^{\lambda},$$
$$(d_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)$$

diesmal (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) zwei beliebige Punkte im Innern r auf dem Rande von T bezeichnen, so hat V im Innern und auf dem nde von T stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Es be- nen ferner, wenn man

$$M_1 = \text{Max}\,|\mu(x, y, z)|$$

zt, Ungleichheitsbeziehungen von der Form

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right| \leqq c_1 M_1,$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right| \leqq c_2 (M_1 + M_2),$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x_2, y_2, z_2)\right| \leqq c_3 (M_1 + M_2) d_{12}^{\lambda},$$[2])

. . . . . .

er c_1, c_2, c_3 Konstante verstanden, wie später unter $c_4, c_5, \ldots$.

Der Beweis dieser und analoger Sätze bietet keine ernsten Schwierig- ten dar, erfordert jedoch, wie man weiß, eine Reihe ziemlich umständ- ner Überlegungen[3]).

Von ganz anderem Charakter sind die Sätze, von denen in dem fol- nden die Rede sein soll. Während vorhin das die Belegung tragende ometrische Gebilde ein für allemal gegeben war und das Potential als tsfunktion des Aufpunktes (x, y, z) studiert wurde, wird nunmehr der reich selbst sowie die Dichte der Belegung variiert. *Der Einfluß der ränderlichkeit des Bereiches ist es, auf den sich jetzt das Interesse kon- triert.* Das Potential wird als Funktion des Bereiches, als ein „Funk- nal" aufgefaßt. Eine solche Auffassung ist natürlich nicht neu, doch sind her in dieser Richtung, soweit ich sehe, lediglich naheliegende Sätze über

---

[1]) Im folgenden kürzer als H-Bedingungen, auch H-Bedingungen mit dem ponenten λ.

[2]) Ganz analoge Ungleichheiten mit unveränderter rechter Seite gelten für $\frac{V}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, was durch die Punkte angedeutet wird.

[3]) S. beispielsweise A. Korn, Sur les équations de l'élasticité, Annales de cole Normale (3), 24 (1907), S. 9—75, insbes. S. 12—42. Genaue Literaturangaben den sich in meinem Encyklopädieartikel II C 3, S. 199—210. Man vergleiche hierzu Bemerkung am Anfang des § 5.

die Abhängigkeit des Potentials V selbst von T abgeleitet worden. Für manche Fragen der Hydrodynamik, der Dynamik vollkommen inkohärenter Medien usw. erscheinen aber gerade Sätze von großer Wichtigkeit, bei denen über das Verhalten partieller Ableitungen von V im Innern und auf dem Rande von T bei geeigneten Änderungen dieses Gebietes präzise Aussagen gemacht werden[4]). Sätze dieser Art bilden den Inhalt des vorliegenden Aufsatzes.

§ 1.

Es sei, wie vorhin, T irgendein beschränktes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Begrenzung S aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier Flächen mit stetiger Normale, die einander weder schneiden noch berühren, besteht. Bekanntlich läßt sich S in eine endliche Anzahl Stücke $\Sigma^{(1)}, \ldots, \Sigma^{(n)}$ zerlegen, so daß in jedem einzelnen dieser Stücke entweder z eine (eindeutige) stetige Funktion von x und y ist, die stetige Ableitungen erster Ordnung hat, oder y eine ebensolche Funktion von x und z, oder schließlich z eine gleich geartete Funktion von x und y darstellt. Es können natürlich auch alle drei Möglichkeiten zugleich bestehen. Man kann sich auch so einrichten, und wir wollen dies im folgenden voraussetzen, daß die einzelnen Bereiche $\Sigma^{(k)}$ die Fläche S „dachziegelartig“ überdecken. Es sei etwa in $\Sigma^{(1)}$

$$z = f^{(1)}(x, y). \tag{6}$$

Die Funktion $f^{(1)}$ ist im Innern und auf dem Rande eines von einer Jordanschen Kurve $\mathfrak{S}^{(1)}$ mit stetiger Tangente begrenzten ebenen Gebietes, kürzer in einem Bereiche $\mathfrak{T}^{(1)}$ (in $\mathfrak{T}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(1)}$), erklärt und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Wir setzen darüber hinaus fest, daß, unter (x_1, y_1), (x_2, y_2) zwei Punkte in $\mathfrak{T}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(1)}$, unter r_{12} ihren Abstand verstanden,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}(x_2, y_2)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}(x_2, y_2)\right| \leqq \overline{M} \tag{7}$$

gilt. Beziehungen dieser Art bestehen für jedes Flächenstück $\Sigma^{(k)}$. Sie besagen, daß die Richtungskosinus der Flächennormale von S einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genügen:

$$|\alpha_1 - \alpha_2|, |\beta_1 - \beta_2|, |\gamma_1 - \gamma_2| \leqq M_0 \delta_{12}^{\lambda}. \tag{8}$$

[4]) Vgl. meine Abhandlung, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze, die in dem gleichen Heft dieser Zeitschrift zur Veröffentlichung gelangt.

Es mögen nunmehr

$$\bar{\xi}(x,y,z), \quad \bar{\eta}(x,y,z), \quad \bar{\zeta}(x,y,z)$$

ei in $T+S$ erklärte stetige Funktionen bezeichnen, die daselbst stetige leitungen erster Ordnung haben und den Ungleichheiten

$$|\bar{\xi}|, |\bar{\eta}|, |\bar{\zeta}| \leqq 2\,\Omega_0; \quad \left|\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq 2\,\Omega_0;$$

0)
$$\left|\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq 2\,\Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

nügen. In (10) bezeichnen $\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}\right)_1$ und $\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x}\right)_2$ die Werte der eingeklammer- n Größe in den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2). Durch die Gleichungen

1)
$$\bar{x} = x + \bar{\xi}, \quad \bar{y} = y + \bar{\eta}, \quad \bar{z} = z + \bar{\zeta}$$

, wenn, wie vorausgesetzt werden soll, Ω_0 hinreichend klein ist, eine pologische Abbildung des Bereiches T auf einen Bereich $\bar{T}$ erklärt, dessen egrenzung $\bar{S}$ sich ganz wie S verhält. Die einzelnen Randkomponenten n $\bar{S}$, Bilder der Randkomponenten von S, sind geschlossene, doppel- nktfreie Flächen mit stetiger Normale, die Richtungskosinus ihrer Nor- ale erfüllen gewisse Ungleichheiten, die zu (8) analog sind.

Sei jetzt $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ irgendein System nebst ihren partiellen Ableitungen ster Ordnung stetiger Ortsfunktionen in $T+S$, die den Ungleichheiten

$$|\dot{\xi}|, |\dot{\eta}|, |\dot{\zeta}| \leqq \Omega_0; \quad \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0;$$

2)
$$\left|\left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

nügen. Sei weiter $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ ein anderes System von Funktionen, die nebst ren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T+S$ stetig sind und die ngleichheiten

$$|\hat{\xi}|, |\hat{\eta}|, |\hat{\zeta}| \leqq \Omega_0; \quad \left|\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0;$$

2*)
$$\left|\left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

$$|\hat{\xi}-\dot{\xi}|, \ldots, |\hat{\zeta}-\dot{\zeta}|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\zeta}-\dot{\zeta})\right| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0,$$

3)
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_2 \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

erfüllen. Auch hier bezeichnet beispielsweise $\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_1$ den Wert der eingeklammerten Größe im Punkte (x_1, y_1, z_1).

Augenscheinlich gehören die durch die topologischen Abbildungen

$$(14) \qquad \hat{x}=x+\hat{\xi}, \ldots, \quad \hat{z}=z+\hat{\zeta}; \qquad \dot{x}=x+\dot{\xi}, \ldots, \quad \dot{z}=z+\dot{\zeta}$$

aus $T+S$ gewonnenen Bilder $\hat{T}+\hat{S}$ und $\dot{T}+\dot{S}$ zu der vorhin mit $\overline{T}+\overline{S}$ bezeichneten Klasse von Bereichen.

Es sei schließlich $\varkappa(x, y, z)$ irgendeine auf S erklärte, der H-Bedingung

$$(15) \qquad |\varkappa(x_1, y_1, z_1)-\varkappa(x_2, y_2, z_2)| \leqq N_2 \delta_{12}^{\lambda}$$

genügende stetige Funktion. Offenbar kann man $\varkappa$ ebensogut als Ortsfunktion auf $\hat{S}$ oder $\dot{S}$ auffassen. Wir setzen

$$(16) \qquad \varkappa(x, y, z)=\hat{\varkappa}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})=\varkappa(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Die Funktionen $\hat{\varkappa}$ und $\dot{\varkappa}$ genügen gewissen zu (15) analogen Ungleichheiten.

Betrachten wir jetzt die Werte des Newtonschen Potentials der auf $\hat{S}$ bzw. $\dot{S}$ ausgebreiteten einfachen Belegungen von der Dichte $\hat{\varkappa}$ bzw. $\dot{\varkappa}$ entsprechend in den Punkten $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ und $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$,

$$(17) \qquad \hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})=\int_{\hat{S}} \hat{\varkappa}' \frac{1}{\hat{r}}\, d\hat{o}', \qquad \dot{U}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})=\int_{\dot{S}} \dot{\varkappa}' \frac{1}{\dot{r}}\, d\dot{o}'.$$

In (17) bezeichnen $d\hat{o}'$ bzw. $d\dot{o}'$ Flächenelemente in den zusammengehörigen Punkten $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ und $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ von $\hat{S}$ und $\dot{S}$; $\hat{r}$ und $\dot{r}$ sind die Abstände der Punktepaare $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ und $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$. Sei schließlich, wie in der Einleitung, r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z').

Nach bekannten Sätzen haben $\hat{U}$ und $\dot{U}$ in $\hat{T}+\hat{S}$ bzw. $\dot{T}+\dot{S}$ stetige Ableitungen erster Ordnung, die ihrerseits einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. *Den wesentlichen Inhalt des neuen Satzes bilden die Ungleichheitsbeziehungen*

$$(18) \qquad \begin{gathered} |\hat{U}-\dot{U}| \leqq c_4 \Omega; \quad \left|\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}}-\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right| \leqq c_4 \Omega, \ldots \\ \left|\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}}-\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right)_1-\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}}-\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right)_2\right| \leqq c_4 \Omega d_{12}^{\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

wo beispielsweise $\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}}-\frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right)_1$ *den Wert der eingeklammerten Größe für* $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ *bezeichnet. Die Konstante* c_4 *gilt bei vorgegebenem* $\varkappa(x, y, z)$ *für alle möglichen* (12), (12*) *und* (13) *genügenden Bereiche* $\hat{T}$ *und* $\dot{T}$ *gleichmäßig.*

Zum Beweise betrachten wir diejenige von einem Parameter ε abgige stetige Schar topologischer Abbildungen des Bereiches $T+S$ auf reiche $T_\varepsilon + S_\varepsilon$, bei der dem Punkte (x, y, z) der Punkt

$$x_\varepsilon = x + \dot{\xi} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\xi} - \dot{\xi}) = \dot{x} + \varepsilon\xi, \quad y_\varepsilon = y + \dot{\eta} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\eta} - \dot{\eta}) = \dot{y} + \varepsilon\eta,$$

$$z_\varepsilon = z + \dot{\zeta} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta}) = \dot{z} + \varepsilon\zeta$$

geordnet wird. Dem Werte $\varepsilon = 0$ entspricht der Bereich $\dot{T} + \dot{S}$, dem rte $\varepsilon = \Omega$ der Bereich $\hat{T} + \hat{S}$. Es sei

)
$$\varkappa_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \varkappa(x, y, z),$$

)
$$U_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} \varkappa'_\varepsilon \frac{1}{r_\varepsilon} d\sigma'_\varepsilon,$$

er $\varkappa'_\varepsilon$ den Wert von $\varkappa_\varepsilon$, unter $d\sigma'_\varepsilon$ das Flächenelement in dem (x', y', z') sprechenden Punkte $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$ von S_ε verstanden; r_ε ist der Abstand Punkte $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ und $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$. Offenbar erfüllen $T_\varepsilon + S_\varepsilon$ für e $\varepsilon \leqq \Omega_0$ die vorhin den Bereichen $\bar{T} + \bar{S}$ auferlegten Ungleichheitsziehungen (10). Für (21) können wir auch setzen, wenn wir vorübernend mit ω und ν die zur Darstellung von S in der Umgebung von $', y', z')$ gebrauchten Gaußschen Parameter bezeichnen[5]),

2)
$$U_\varepsilon = \int_S \varkappa' \frac{1}{r_\varepsilon} A' \, d\sigma',$$

$$r_\varepsilon^2 = (x'_\varepsilon - x_\varepsilon)^2 + (y'_\varepsilon - y_\varepsilon)^2 + (z'_\varepsilon - z_\varepsilon)^2$$

$$= (x' + \dot{\xi}' + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\xi}' - \dot{\xi}') - x - \dot{\xi} - \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\xi} - \dot{\xi}))^2 + \ldots, \quad A'_\varepsilon = \frac{A'_\varepsilon}{A'} > 0,$$

3)
$$A_\varepsilon^2 = \left(\frac{\partial(x_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\partial(\omega, \nu)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_\varepsilon, z_\varepsilon)}{\partial(\omega, \nu)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_\varepsilon, z_\varepsilon)}{\partial(\omega, \nu)}\right)^2,$$

$$A^2 = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\omega, \nu)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(\omega, \nu)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(\omega, \nu)}\right)^2.$$

Ist z. B. $\omega = x$, $\nu = y$, so finden wir

$$^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad A_\varepsilon^2 = \left(\frac{\partial(x_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\partial(x, y)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_\varepsilon, z_\varepsilon)}{\partial(x, y)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_\varepsilon, z_\varepsilon)}{\partial(x, y)}\right)^2.$$

Der Ausdruck (22) hat offenbar für alle *komplexen*, der Beziehung $| \leqq \Omega_0$ genügenden Werte von ε eine bestimmte Bedeutung[6]). Wir

[5]) Offenbar decken sich ω und ν mit den kartesischen Koordinaten x', y' oder z' bzw. y', z' (vgl. oben).

[6]) Wir wählen Ω_0 so klein, daß für alle komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$, alle zulässigen $\dot{\eta}, \dot{\zeta}; \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ und alle (x, y, z) und (x', y', z') in $T+S$ gewiß $\left|\frac{r_\varepsilon}{r}\right| \geqq q > 0$ gilt.

fassen (22) als den Wert des Potentials einer über die Fläche S_ε ausgebreiteten einfachen Belegung der Dichte $\varkappa'_\varepsilon$ im Punkte $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$ auf. Wie man leicht sieht, ist U_ε eine für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ analytische und reguläre Funktion von ε. Ferner ist

$$\hat{U} - \dot{U} = \int_0^\Omega \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \tag{24}$$

Sei Γ_0 der Kreis vom Radius Ω_0 um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt in der Ebene der komplexen Variablen ε. Der Cauchysche Integralsatz liefert für U_ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ den Ausdruck

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{d\delta}{(\delta - \varepsilon)^2} U_\delta, \qquad \delta = \Omega_0 e^{i\psi}. \tag{25}$$

In (25) bezeichnet U_δ denjenigen Wert, den das Potential (22) erhält, wenn man dem Parameter ε den Zahlwert $\delta = \Omega_0 e^{i\psi}$ erteilt. Wie schon einmal bemerkt, erfüllen alle Bereiche $T_\delta + S_\delta$, die jetzt freilich nur für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ reell sind, die vorhin den Bereichen $\overline{T} + \overline{S}$ auferlegten Ungleichheitsbeziehungen. Das Potential U_δ hat für alle (x, y, z) in T und auf S, mithin bei reellem δ für alle $(x_\delta, y_\delta, z_\delta)$ in $T_\delta + S_\delta$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x_\delta} U_\delta, \quad \frac{\partial}{\partial y_\delta} U_\delta, \quad \frac{\partial}{\partial z_\delta} U_\delta, \tag{26}$$

die ihrerseits der H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen[7]). Es gelten für alle den Beziehungen (12), (12*) und (13) genügenden $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ und $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ und alle $|\delta| = \Omega_0$ gleichmäßig Ungleichheiten von der Form

$$|U_\delta|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_\delta} U_\delta\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z_\delta} U_\delta\right| \leqq c_\delta; \quad \left|\left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}\right)_1 - \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}\right)_2\right| \leqq c_\delta d_{12}^\lambda. \tag{28}$$

In (28) bezeichnen $\left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}\right)_1$, $\left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}\right)_2$ die Werte der eingeklammerten Größen in den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2). Die vorstehenden Behauptungen lassen sich durch sinngemäße, fast wortgetreue Übertragung der bekannten für reelle ε geltenden Betrachtungen erweisen.

In § 5 sind an Hand eines ebenen Problems die in Betracht kommenden Überlegungen in einiger Ausführlichkeit wiedergegeben worden.

---

[7]) Für komplexe δ und „im Innern von T_δ gelegene $(x_\delta, y_\delta, z_\delta)$", d. h. für (x, y, z) in T, sind (26) durch die Formeln erklärt:

$$\frac{\partial}{\partial x_\delta} U_\delta = \int_S \varkappa' \frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{1}{r_\delta}\right) A'_\delta \, do', \ldots. \tag{27}$$

Nach (24), (25), (28) finden wir für alle reellen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$:

$$|\hat{U} - \dot{U}| \leqq \Omega \operatorname{Max}\left|\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right| \quad \text{und wegen} \quad |U_\delta| \leqq c_5, \quad |\delta - \varepsilon| \geqq \frac{\Omega_0}{2}:$$

$$\operatorname{Max}\left|\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right| \leqq \frac{1}{2\pi} c_5 \, 2\pi \, \Omega_0 \frac{4}{\Omega_0^2}, \quad \text{also} \quad |\hat{U} - \dot{U}| \leqq \frac{4 c_5}{\Omega_0} \Omega = c_5' \Omega.$$

Aus (25) folgt weiter

$$\frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial \dot{x} \, \partial \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{d\delta}{(\delta - \varepsilon)^2} \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta} \frac{\partial x_\delta}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U_\delta}{\partial y_\delta} \frac{\partial y_\delta}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U_\delta}{\partial z_\delta} \frac{\partial z_\delta}{\partial \dot{x}} \right).$$ [8])

Für den absoluten Betrag des Klammerausdruckes läßt sich nach (28), , (12*), (13), (14) und (19) eine obere Schranke angeben. Aus (24) (30) folgt darum

$$\left|\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right| = \left|\int_0^\Omega \frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial \dot{x} \, \partial \varepsilon} d\varepsilon\right| \leqq c_6 \, \Omega.$$

nnaloger Weise findet man

$$\left|\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{y}}\right|, \left|\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{z}}\right| \leqq c_6 \, \Omega.$$

Wegen (12), (12*) und (13) folgen hieraus ohne Mühe die weiteren ehungen

$$\left|\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right|, \left|\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{y}}\right|, \left|\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{z}}\right| \leqq c_7 \, \Omega.$$

hnlicher Weise finden wir nun auch die Ungleichheiten

$$\left|\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial \dot{x}}\right)_2\right| \leqq c_8 \, \Omega \, d_{12}^{\lambda}$$

. . . . . .

Es sei jetzt c_4 die größte der drei Zahlen c_5', c_7, c_8. Wie ein Blick , lassen sich die Ungleichheiten (29), (32), (33) zu den Ungleichen (18) zusammenfassen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nun noch einige ergänzende Bemerkungen. Wir haben den vorstehen- Betrachtungen eine bestimmte stetige, der H-Bedingung genügende tefunktion $\varkappa$ zugrunde gelegt. Es möge in $T + S$

$$|\varkappa| \leqq N_1.$$

Vorhin war bereits

$$|\varkappa(x_1, y_1, z_1) - \varkappa(x_2, y_2, z_2)| \leqq N_2 \, \delta_{12}^{\lambda}$$

---

[8]) In (30), wie übrigens auch in (31), werden $U_\varepsilon, U_\delta, \dot{U}, \hat{U}, x_\delta, y_\delta, z_\delta$ als Ortsionen in $T+S$ betrachtet.

gesetzt worden. Auf der rechten Seite der Ungleichheiten (28) kann man für c_5 auch

$$c_5^*(N_1+N_2) \quad \text{bzw.} \quad c_5^*(N_1+N_2)\,d_{12}^{\lambda}$$

schreiben. Man erhält so für (18)

$$|\hat{U}-\dot{U}| \leqq c_4^*(N_1+N_2)\,\Omega; \quad \left|\frac{\partial\hat{U}}{\partial\hat{x}}-\frac{\partial\dot{U}}{\partial\dot{x}}\right| \leqq c_4^*(N_1+N_2)\,\Omega, \ldots$$

$$(18^*) \quad \left|\left(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\hat{x}}-\frac{\partial\dot{U}}{\partial\dot{x}}\right)_1-\left(\frac{\partial\hat{U}}{\partial\hat{x}}-\frac{\partial\dot{U}}{\partial\dot{x}}\right)_2\right| \leqq c_4^*(N_1+N_2)\,\Omega\,d_{12}^{\lambda}, \ldots$$

. . . . . .

Diese Beziehungen gelten für alle (12), (12*) *und* (13) *genügenden Funktionen* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}; \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *und alle zulässigen Dichtefunktionen gleichmäßig.*

Wir haben der Dichte $\varkappa$ in korrespondierenden Punkten von $S, \dot{S}, \hat{S}$ den gleichen Wert erteilt. Der Einfluß einer Änderung der Dichte beim Übergang von $\dot{S}$ zu $\hat{S}$ läßt sich durch eine elementare Betrachtung ermitteln.

Bei dem vorstehend skizzierten Beweise wurden ε komplexe Werte erteilt. Eine andere Möglichkeit, die Hilfssätze dieser Arbeit zu beweisen, bei der von jenem Mittel kein Gebrauch gemacht wird, findet sich in § 6 skizziert.

§ 2.

Ein ganz analoger Satz gilt für das Potential einer doppelten Flächenbelegung.

Es sei χ eine auf S erklärte stetige Funktion, die stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat. Sind ω und ν die Gaußschen Parameter der Fläche S in der Umgebung eines ihrer Punkte[9]), so kann man χ als Funktion von ω und ν auffassen. Es gelten dann die Ungleichheiten

$$(34) \quad |\chi|; \left|\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right|, \left|\frac{\partial\chi}{\partial\nu}\right| \leqq N_3; \quad \left|\left(\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right)_1-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right)_2\right| \leqq N_4\,\delta_{12}^{\lambda}, \ldots.$$

Wir setzen

$$(35) \quad \chi(x,y,z)=\dot{\chi}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\hat{\chi}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$$

und bezeichnen mit $\dot{\theta}'$ den von dem Vektor $(\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}') \to (\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ mit der Innennormale von $\dot{S}$ in $(\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}')$ eingeschlossenen Winkel. Ein

[9]) Vgl. die Fußnote [5]).

loge Bedeutung hat $\dot{\theta}'$. Betrachten wir die Potentiale der Doppel-egungen

$$\dot{W}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \int_{\dot{S}} \dot{\chi}' \frac{1}{\dot{r}^2} \cos\dot{\theta}' \, d\dot{\sigma}', \tag{6}$$

$$\hat{W}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \int_{\hat{S}} \hat{\chi}' \frac{1}{\hat{r}^2} \cos\hat{\theta}' \, d\hat{\sigma}'. \tag{6*}$$

Nach bekannten Sätzen haben $\dot{W}$ und $\hat{W}$ in $\dot{T}+\dot{S}$ bzw. $\hat{T}+\hat{S}$ etige partielle Ableitungen erster Ordnung, die der H-Bedingung mit m Exponenten λ genügen. *Es gelten ferner für alle* (12), (12*) *und* 3) *genügenden* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ *und* $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *gleichmäßig die folgenden neuen ziehungen*:

$$|\hat{W} - \dot{W}| \leqq c_9 \Omega; \qquad \left|\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}\right| \leqq c_9 \Omega, \ldots;$$

$$\left|\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}\right)_2\right| \leqq c_9 \Omega \, d_{12}^{\lambda}, \tag{7}$$

. . . . . .

Der Beweis ist ganz wie in § 1 zu führen. Für komplexe ε bedarf $_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ einer geeigneten neuen Definition. Man gelangt zu dieser, enn man einfach in (36) $\cos\dot{\theta}'$ durch die Koordinaten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$ nd ihre partiellen Ableitungen ausdrückt.

Die Bemerkungen am Schluß des vorhergehenden Paragraphen gelten nngemäß auch diesmal.

§ 3.

Es sei $\vartheta(x, y, z)$ eine in $T+S$ erklärte stetige, der H-Bedingung ge-ügende Funktion:

$$|\vartheta(x, y, z)| \leqq N_5, \quad |\vartheta(x_1, y_1, z_1) - \vartheta(x_2, y_2, z_2)| \leqq N_6 d_{12}^{\lambda}. \tag{38}$$

Wir setzen

$$\vartheta(x, y, z) = \dot{\vartheta}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \hat{\vartheta}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \tag{39}$$

nd betrachten die Volumpotentiale

$$\dot{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \int_{\dot{T}} \dot{\vartheta}' \frac{1}{\dot{r}} d\dot{\tau}', \qquad \hat{V}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \int_{\hat{T}} \hat{\vartheta}' \frac{1}{\hat{r}} d\hat{\tau}'. \tag{40}$$

ier gelten für alle (12), (12*) und (13) *genügenden* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ *und* $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *leichmäßig Ungleichheiten von der Form*

$$|\hat{V}-\dot{V}| \leqq c_{10}\Omega, \quad \left|\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}}-\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{x}}\right| \leqq c_{10}\Omega, \ldots, \quad \left|\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2}-\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}\right| \leqq c_{10}\Omega, \ldots$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2}-\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}\right)_1-\left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2}-\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}\right)_2\right| \leqq c_{10}\Omega\, d_{12}^{\lambda}. \tag{41}$$

Der Beweis ist ähnlich wie in § 1 zu führen. Wir setzen im Anschluß an die Bezeichnungen des § 1

$$\vartheta_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \vartheta(x, y, z),$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}} = \int_T \hat{\vartheta}'\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\frac{1}{\hat{r}}\right) d\hat{\tau}', \qquad \frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{x}} = \int_T \dot{\vartheta}'\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{1}{\dot{r}}\right) d\dot{\tau}',$$

$$P_\varepsilon = \int_{T_\varepsilon} \vartheta_\varepsilon'\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\frac{1}{r_\varepsilon}\right) d\tau_\varepsilon' = \int_T \vartheta'\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\frac{1}{r_\varepsilon}\right)\frac{\partial(x_\varepsilon', y_\varepsilon', z_\varepsilon')}{\partial(x', y', z')}\, d\tau', \tag{42}$$

$$\left(r_\varepsilon^2 = (x_\varepsilon'-x_\varepsilon)^2+(y_\varepsilon'-y_\varepsilon)^2+(z_\varepsilon'-z_\varepsilon)^2\right)$$

und finden

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}}-\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{x}} = \int_0^\Omega \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon,$$

$$\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{d\delta}{(\delta-\varepsilon)^2} P_\delta, \qquad P_\delta = \int_{T_\delta} \vartheta_\delta'\left(\frac{\partial}{\partial x_\delta}\frac{1}{r_\delta}\right) d\tau_\delta, \tag{43}$$

mithin

$$\left|\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}}-\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{x}}\right| \leqq c_{10}\Omega. \tag{44}$$

Um eine Abschätzung für $\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2}-\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2}$ zu gewinnen, muß man eine Schranke für $\frac{\partial P_\delta}{\partial x_\delta}$ mit $\delta = \Omega_0 e^{i\psi}$ bestimmen. Die Existenz und Stetigkeitseigenschaften der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des Newtonschen Potentials $V_\varepsilon = \int_{T_\varepsilon} \vartheta_\varepsilon' \frac{1}{r_\varepsilon}\, d\tau_\varepsilon'$ für komplexe Werte von ε [10]) werden durch sinngemäße, fast wortgetreue Übertragung des im Reellen üblichen Verfahrens bewiesen.

Die Bemerkungen am Schluß des § 1 gelten sinngemäß auch jetzt

---

[10]) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von V_ε genügen der H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Man vergleiche die Ausführungen der beiden letzten Paragraphen dieses Aufsatzes.

§ 4.

Macht man bezüglich des Charakters der Randflächen und der Beschaffenheit der Belegungsfunktionen geeignete weitergehende Voraussetzungen, so lassen sich auch für partielle Ableitungen höherer Ordnung der Potentiale U, V, W Ungleichheiten angeben, die zu (18), (37) und (41) analog sind. Haben z. B. die Funktionen $f^{(1)}(x, y)$ [11]), $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\eta}, \hat{\zeta}$ stetige, der H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügende Abteilungen zweiter Ordnung, sind weiter partielle Ableitungen erster Ordnung der Dichte ϑ vorhanden und genügen sie der H-Bedingung mit dem Exponenten λ, ist schließlich

$$\text{(35)} \quad \left|\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial x^2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial z^2}\right| \leqq \Omega_0;$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\dot{\xi}(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\dot{\xi}(x_2, y_2, z_2)\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \ldots,$$

$$\text{(35*)} \quad \left|\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial x^2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial z^2}\right| \leqq \Omega_0; \quad \left|\left(\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial x^2}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \ldots.$$

wie

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0, \ldots, \left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_2\right| \leqq \Omega d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

gelten für die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von $\hat{V}$ und $\dot{V}$ Ungleichheiten, die zu (41) analog sind.

Ganz ähnliche Sätze gelten in der Theorie des logarithmischen Potentials.

§ 5.

Die Hilfssätze, auf die sich die Beweise der vorliegenden Arbeit stützen, finden sich in der Literatur nicht in allen Einzelheiten bewiesen. Von verschiedenen Autoren wird nämlich wohl vorausgesetzt, daß die Belegungsdichten den in den §§ 1 bis 4 eingeführten Bedingungen genügen, bezüglich des Charakters der Randkurven oder Randflächen werden dagegen etwas weitergehende Annahmen gemacht und darüber hinaus nur erwähnt, daß sich diese entsprechend reduzieren lassen. Dabei gestatten die vorliegenden Beweise zumeist keine unmittelbare Übertragung. Angesichts der Wichtigkeit des Gegenstandes soll im folgenden einer der Hilfs-

[11]) Und die hierzu analogen Funktionen in $\Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(n)}$ (vgl. S. 74).

sätze im engen Anschluß an gewisse Betrachtungen von Herrn Korn[12] mit einigen Einzelheiten diskutiert werden.

Es sei T ein von einer geschlossenen doppelpunktfreien Kurve mit stetiger Normale S begrenzter Bereich in der Ebene der Variablen x und y. Sind $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(s)$ die Gleichungen von S, unter s, wie üblich, die Bogenlänge verstanden, so wird darüber hinaus vorausgesetzt, daß $\frac{d\xi}{ds}$ und $\frac{d\eta}{ds}$ der H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen,

$$(47)\quad \left|\frac{d\xi(s_1)}{ds} - \frac{d\xi(s_2)}{ds}\right|, \left|\frac{d\eta(s_1)}{ds} - \frac{d\eta(s_2)}{ds}\right| \leqq \mathfrak{M}_1 |s_1 - s_2|^\lambda \quad (0 < \lambda < 1).$$

Es sei weiter $\varkappa(s)$ eine stetige, einer H-Bedingung genügende Ortsfunktion auf S,

$$(48)\qquad |\varkappa(s_1) - \varkappa(s_2)| \leqq \mathfrak{M}_2 |s_1 - s_2|^\lambda.$$

Betrachten wir das logarithmische Potential der einfachen Linienbelegung

$$(49)\quad U(x, y) = \int_S \varkappa(s') \log \frac{1}{r}\, ds', \qquad r^2 = (\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2,$$
$$\xi' = \xi(s'), \quad \eta' = \eta(s').$$

Wir wollen zeigen, daß die Randwerte der partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ auf S der H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen, in Formeln

$$(50)\qquad \left|\frac{\partial U(s_1)}{\partial x} - \frac{\partial U(s_2)}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial U(s_1)}{\partial y} - \frac{\partial U(s_2)}{\partial y}\right| \leqq c_{11} |s_1 - s_2|^\lambda.$$

Herr Korn beweist dies an der zitierten Stelle in eleganter Weise für das Kreisgebiet, unter Benutzung einiger Formeln der Funktionentheorie. Seine Betrachtungen lassen sich, wie wir gleich sehen werden, in geeigneter Weise modifiziert, auf das uns interessierende Problem anwenden.

Das Potential $U(x, y)$ ist der reelle Teil der in $T + S$ stetigen, in T regulären Funktion

$$(51)\qquad F(z) = \int_S \varkappa(s') \log \frac{1}{z - \zeta'}\, ds', \qquad \zeta' = \xi' + i\eta',$$

so daß für alle $z = x + iy$ im Innern von T

$$(52)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dF(z)}{dz} = -\int_S \varkappa(s') \frac{ds'}{z - \zeta'}$$

---

[12]) Vgl. A. Korn, Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen, Abhandlungen der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1909. Anhang. S. 1–37 insbes. S. 7–14.

etzt werden kann. Es gilt weiter mit $d\mathfrak{z}' = ds' e^{i\psi'}$

3) $$\int_S \frac{d\mathfrak{z}'}{z-\mathfrak{z}'} = -2\pi i,$$

rum, unter $\mathfrak{z}_1 = \xi_1 + i\eta_1$ den Punkt s_1 auf S verstehend,

4) $$\frac{dF(z)}{dz} = -\int_S \frac{\varkappa(s')e^{-i\psi'} - \varkappa(s_1)e^{-i\psi_1}}{z-\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' + 2\pi i \varkappa(s_1) e^{-i\psi_1}.$$

s (54) ergibt sich für

5) $$\frac{dF(\mathfrak{z}_1)}{dz} = \lim_{z\to\mathfrak{z}_1} \frac{dF(z)}{dz}$$

bekannter Weise der Ausdruck

6) $$\frac{dF(\mathfrak{z}_1)}{dz} = -\int_S \frac{\varkappa(s')e^{-i\psi'} - \varkappa(s_1)e^{-i\psi_1}}{\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' + 2\pi i \varkappa(s_1) e^{-i\psi_1}.$$

Wir setzen zur Vereinfachung

7) $$\varkappa(s)e^{-i\psi} = \mathfrak{k}(s).$$

Wegen

8) $$e^{-i\psi} = \cos\psi - i\sin\psi = \frac{d\xi}{ds} - i\frac{d\eta}{ds}$$

ld (47) genügt auch $\mathfrak{k}(s)$ der H-Bedingung mit dem Exponenten λ.

Aus (56) und (57) folgt jetzt

8) $$\frac{dF(\mathfrak{z}_1)}{dz} = -\int_S \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)}{\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' + 2\pi i \mathfrak{k}(s_1).$$

Es ist nun zu zeigen, daß, wenn $\mathfrak{z}_2$ einen Punkt auf S in der Nachbarschaft von $\mathfrak{z}_1$ bezeichnet,

9) $$\left|\frac{dF(\mathfrak{z}_1)}{dz} - \frac{dF(\mathfrak{z}_2)}{dz}\right| \leqq c_{12} |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|^\lambda$$

lt. Wir setzen zu diesem Zweck im Anschluß an Herrn Korn[13])

$$\frac{dF(\mathfrak{z}_2)}{dz} - \frac{dF(\mathfrak{z}_1)}{dz}$$

0) $$= -\int_{S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_2)}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' + \int_{S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)}{\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' + (\mathfrak{k}(s_2)-\mathfrak{k}(s_1)) \int_{S-S_0} \frac{d\mathfrak{z}'}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}'}$$

$$-\int_{S-S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' + \int_{S-S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)}{\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}'} d\mathfrak{z}' + 2\pi i \mathfrak{k}(s_2) - 2\pi i \mathfrak{k}(s_1).$$

[13]) Man vergleiche die Formel (12) auf S. 10 der in der vorhergehenden Fußote gonannten Abhandlung. Dort sind die Integrale über eine Kreislinie erstreckt; e zu integrierende Funktion enthält noch den Faktor $\frac{1}{i\mathfrak{z}'}$, der aber die weiteren chlüsse nicht beeinflußt. Auch sonst ist unsere Formel (60) etwas anders gebaut.

Hier bezeichnet S_0 den im Innern einer Kreisfläche vom Radius $|s_2 - s_1|$ um den Mittelpunkt des kürzeren der beiden $\mathfrak{z}_{\vartheta_1}$ mit $\mathfrak{z}_{\vartheta_2}$ verbindenden Bögen von S enthaltenen Teil der Randkurve. Es ist nun nicht schwer zu sehen, daß

$$(61)\qquad \left|\int_{S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_2)}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}'}\,d\mathfrak{z}'\right|,\ \left|\int_{S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)}{\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}'}\,d\mathfrak{z}'\right| \leqq c_{13}\,|\mathfrak{z}_{\vartheta_1}-\mathfrak{z}_{\vartheta_2}|^{\lambda}$$

gilt. Des weiteren ist

$$(62)\qquad \left|\int_{S-S_0} \frac{d\mathfrak{z}'}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}'}\right| = \left|\log\frac{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}^{(1)}}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}^{(2)}}\right| \leqq c_{14},$$

unter $\mathfrak{z}^{(1)}$ und $\mathfrak{z}^{(2)}$ die Endpunkte von $S-S_0$ verstanden, mithin

$$(63)\qquad |\mathfrak{k}(s_2)-\mathfrak{k}(s_1)|\left|\int_{S-S_0} \frac{d\mathfrak{z}'}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}'}\right| \leqq c_{15}\,|\mathfrak{z}_{\vartheta_1}-\mathfrak{z}_{\vartheta_2}|^{\lambda}.$$

Wir schreiben ferner mit Herrn Korn

$$\begin{aligned}(64)\qquad \Lambda &= \int_{S-S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)}{\mathfrak{z}_2-\mathfrak{z}'}\,d\mathfrak{z}' - \int_{S-S_0} \frac{\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)}{\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}'}\,d\mathfrak{z}' \\ &= \int_{S-S_0} (\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1))\,d\mathfrak{z}' \int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2} d\mathfrak{z}^*\,\frac{d}{d\mathfrak{z}^*}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^*-\mathfrak{z}'}\right) \\ &= \int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2} d\mathfrak{z}^* \int_{S-S_0} (\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1))\,\frac{d}{d\mathfrak{z}^*}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^*-\mathfrak{z}'}\right) d\mathfrak{z}' = \int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2} d\mathfrak{z}^* \int_{S-S_0} II\,d\mathfrak{z}'\end{aligned}$$

und bemerken, daß die folgenden Ungleichheiten gelten:

$$(65)\qquad \left|\frac{d}{d\mathfrak{z}^*}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^*-\mathfrak{z}'}\right)\right| = \left|\frac{1}{(\mathfrak{z}'-\mathfrak{z}^*)^2}\right| \leqq c_{16}\,\frac{1}{|\mathfrak{z}'-\mathfrak{z}_{\vartheta_1}|^2},$$

$$(66)\qquad |II| \leqq c_{17}\,\frac{1}{|\mathfrak{z}'-\mathfrak{z}_{\vartheta_1}|^{2-\lambda}},$$

$$(67)\qquad \left|\int_{S-S_0} II\,d\mathfrak{z}'\right| \leqq c_{18}\,\frac{1}{|\mathfrak{z}_{\vartheta_2}-\mathfrak{z}_{\vartheta_1}|^{1-\lambda}},$$

$$(68)\qquad |\Lambda| \leqq c_{19}\,|\mathfrak{z}_{\vartheta_2}-\mathfrak{z}_{\vartheta_1}|^{\lambda}.$$

Aus (61), (63), (68) folgt, da auch $\mathfrak{k}(s)$ der H-Bedingung genügt, unsere Behauptung.

Die vorstehenden Entwicklungen benutzen die Symbolik der Funktionentheorie. Man kann sie natürlich durch Trennung der beiden Bestandteile komplexer Größen ebensogut in ein Gewand kleiden, in dem nur reelle Größen vorkommen. Die so aus (60) und den darauf folgenden Be-

hungen gewonnenen etwas komplizierteren Formeln denke man sich statt S auf die in dem § 1 eingeführte Randkurve S_ε [14]) angewandt, wobei Parameter ε zunächst einen reellen Wert haben soll. Die im Laufe serer Betrachtungen auftretenden Integralausdrücke können wir gewiß umformen, daß alle Integrationen über S bzw. S_0 oder $S - S_0$ erstreckt d. In dieser Fassung gelten alle Formeln und Abschätzungen, auch an ε dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine komplexe Werte eilt werden. So ist z. B., wenn S_ε, $S_\varepsilon - S_{0\varepsilon}$, $\mathfrak{z}_{2\varepsilon}$, $\mathfrak{z}_\varepsilon'$, $d\mathfrak{z}_\varepsilon'$ Bilder von $S - S_0$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}'$, $d\mathfrak{z}'$ auf S_ε bezeichnen, in naheliegender Schreibweise

$$\mathfrak{z}_\varepsilon' = \mathfrak{z}' + \varepsilon(\xi(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') + i\,\eta(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')),$$

$$\mathfrak{z}_{2\varepsilon} = \mathfrak{z}_2 + \varepsilon(\xi(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2) + i\,\eta(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2)),$$

$$\frac{d\mathfrak{z}_\varepsilon'}{d\mathfrak{z}'} = 1 + \frac{d\xi' + i\,d\eta'}{d\mathfrak{x}' + i\,d\mathfrak{y}'} + \varepsilon\,\frac{d\xi' + i\,d\eta'}{d\mathfrak{x}' + i\,d\mathfrak{y}'}.$$

)
$$\int_{S_\varepsilon - S_{0\varepsilon}} \frac{d\mathfrak{z}_\varepsilon'}{\mathfrak{z}_{2\varepsilon} - \mathfrak{z}_\varepsilon'} = \int_{S - S_0} \frac{d\mathfrak{z}_\varepsilon'}{d\mathfrak{z}'}\,\frac{d\mathfrak{z}'}{\mathfrak{z}_{2\varepsilon} - \mathfrak{z}_\varepsilon'} = \log \frac{\mathfrak{z}_{2\varepsilon} - \mathfrak{z}_\varepsilon^{(2)}}{\mathfrak{z}_{2\varepsilon} - \mathfrak{z}_\varepsilon^{(1)}}.$$

Man sieht zunächst ohne Mühe, daß für alle reellen ε mit $|\varepsilon| \leqq \tilde{\varepsilon}$

)
$$\left|\Re \int_{S - S_0} \frac{d\mathfrak{z}_\varepsilon'}{d\mathfrak{z}'}\,\frac{d\mathfrak{z}'}{\mathfrak{z}_{2\varepsilon} - \mathfrak{z}_\varepsilon'}\right|, \quad \left|\Im \int_{S - S_0} \frac{d\mathfrak{z}_\varepsilon'}{d\mathfrak{z}'}\,\frac{d\mathfrak{z}'}{\mathfrak{z}_{2\varepsilon} - \mathfrak{z}_\varepsilon'}\right| \leqq c_{20}$$

t. Eine aufmerksame Betrachtung aller Zwischenformeln lehrt alsdann, ß diese Beziehungen auf für komplexe ε mit $|\varepsilon| \leqq \tilde{\varepsilon}$ erfüllt sind.

Damit ist die Basis für die Entwicklungen der §§ 1 bis 4 geschaffen.

§ 6.

Wir haben in § 1 noch eine andere Möglichkeit, zum Beweise der auptsätze dieser Abhandlung zu gelangen, angedeutet, wobei der Para- eter ε durchaus reell bleibt. Angewandt auf das spezielle in § 5 be- ndelte Problem würden die fraglichen Betrachtungen so aussehen. Wir nden die Formel (60) einmal auf die Randkurve S_ε, das andere Mal f die Kontur S_{ε^*}, unter ε^* einen zu ε benachbarten Wert des Para- eters verstanden, an, subtrahieren die beiden Seiten der ersten Gleichung n denjenigen der zweiten, dividieren beiderseits durch $\varepsilon^* - \varepsilon$ und gehen r Grenze $\varepsilon^* \to \varepsilon$ über. Wir erhalten so in naheliegender Schreibweise

[14]) Dort wird das analoge räumliche Problem betrachtet, S_ε ist eine Fläche.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{dF(\vartheta_{2\varepsilon})}{dz}-\frac{dF(\vartheta_{1\varepsilon})}{dz}\right)=-\int_{S_0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\frac{\mathfrak{k}_\varepsilon(s'_\varepsilon)-\mathfrak{k}_\varepsilon(s_{2\varepsilon})}{\vartheta_{2\varepsilon}-\vartheta'_\varepsilon}\cdot\frac{d\vartheta'_\varepsilon}{d\vartheta'}\right\}d\vartheta'$$

$$+\int_{S_0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{\frac{\mathfrak{k}_\varepsilon(s'_\varepsilon)-\mathfrak{k}_\varepsilon(s_{1\varepsilon})}{\vartheta_{1\varepsilon}-\vartheta'_\varepsilon}\cdot\frac{d\vartheta'_\varepsilon}{d\vartheta'}\right\}d\vartheta'+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{(\mathfrak{k}_\varepsilon(s_2)-\mathfrak{k}_\varepsilon(s_1))\int_{S-S_0}\frac{d\vartheta'_\varepsilon}{d\vartheta'}\frac{d\vartheta'}{\vartheta_{2\varepsilon}-\vartheta'_\varepsilon}\right\} \tag{71}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{S-S}(\mathfrak{k}_\varepsilon(s'_\varepsilon)-\mathfrak{k}_\varepsilon(s_{1\varepsilon}))\frac{d\vartheta'_\varepsilon}{d\vartheta'}\left(\frac{1}{\vartheta_{2\varepsilon}-\vartheta'_\varepsilon}-\frac{1}{\vartheta_{1\varepsilon}-\vartheta'_\varepsilon}\right)d\vartheta'$$

$$+2\pi i\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\mathfrak{k}_\varepsilon(s_{2\varepsilon})-\mathfrak{k}_\varepsilon(s_{1\varepsilon})).$$

Für die Ausdrücke rechterhand gelten Abschätzungsformeln, die zu den in § 5 abgeleiteten ganz analog sind. Dies kommt daher, weil beispielsweise die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\mathfrak{k}_\varepsilon(s'_\varepsilon)-\mathfrak{k}_\varepsilon(s_{1\varepsilon}))\quad\text{und}\quad\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{\vartheta_{1\varepsilon}-\vartheta'_\varepsilon}\right)$$

für $s'\to s$ von der gleichen Ordnung verschwinden bzw. unendlich groß werden wie die Ausdrücke $\mathfrak{k}(s')-\mathfrak{k}(s_1)$ und $\frac{1}{\vartheta_1-\vartheta'}$.

Wir finden also

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{dF(\vartheta_{2\varepsilon})}{dz}-\frac{dF(\vartheta_{1\varepsilon})}{dz}\right)\right|\leqq c_{21}|\vartheta_2-\vartheta_1|^\lambda. \tag{72}$$

Durch Integration in bezug auf ε gelangt man von hier aus zu der Formel, die bei dem jetzt behandelten speziellen Problem der dritten Formel in (18) entspricht.

Leipzig, den 16. Mai 1924.

(Eingegangen am 16. Mai 1924.)

Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Die Helmholtzschen Wirbelsätze bilden heute noch das Fundament nd zugleich eine Gipfelleistung der Hydrodynamik. Sie beziehen sich auf deelle, der Wirkung konservativer Kräfte ausgesetzte homogene Flüssigeiten. Diese können inkompressibel oder aber zusammendrückbar (tropfbar der gasförmig) sein, wobei dann die Zustandsgleichung die Form $p = p(\varrho)$ p = Druck, ϱ = Dichte) haben muß. Wenn auch diesmal die Dichte wegen er Veränderlichkeit des Druckes nicht räumlich konstant zu sein braucht, erden die fraglichen Flüssigkeiten bzw. Gase immer noch als homogen ezeichnet. *Wir beschränken uns in der vorliegenden Arbeit auf die Beachtung inkompressibler (reibungsloser, homogener) Flüssigkeiten.*

Die eigentliche Grundlage der Helmholtzschen Theorie bilden die ekannten zuerst von Cauchy aufgestellten Formeln für die Wirbelkomonenten. Bei ihrer Ableitung wird von der Annahme ausgegangen, daß ie Koordinaten x, y, z der Flüssigkeitsteilchen stetige Funktionen von , b, c, t sind, die stetige Ableitungen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, stetige, llenfalls auf stetig gekrümmten Flächen $\Phi(a, b, c) = 0$ sprunghaft unetige Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}; \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial c^2}; \frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{\partial}{\partial c}\frac{dz}{dt}$ aben und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a},\\
(1)\qquad &\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b},\\
&\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c},
\end{aligned}
$$

$$
(2)\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=1
$$

erfüllen. Hier, wie weiter unten, bezeichnen a, b, c stets die speziellen Lagrangeschen Parameter eines Flüssigkeitsteilchens, d. h. seine kartesischen Koordinaten in einem bestimmten, festzuhaltenden Zeitpunkt t_0; $U(x,y,z,t)$, $X=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial U}{\partial y}$, $Z=\frac{\partial U}{\partial z}$ sind stetige Funktionen. Der Druck p wird als stetige Funktion von a, b, c, t vorausgesetzt. Aus (1) folgt, daß $\frac{\partial p}{\partial a}$, $\frac{\partial p}{\partial b}$, $\frac{\partial p}{\partial c}$ stetig, allenfalls auf $\Phi(a,b,c)=0$ sprungweise unstetig sind.

Einer der Hauptsätze der Theorie handelt von der Unzerstörbarkeit der Wirbellinien: Flüssigkeitsteilchen, die sich einmal auf einer Wirbellinie befanden, erfüllen im Verlauf der Bewegung immer wieder eine Wirbellinie. Unerörtert bleibt dabei die Frage, ob es unter vorgegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen tatsächlich Flüssigkeitsbewegungen gibt, die den vorstehenden Differentialgleichungen (sowie den bekannten Kompatibilitätsbedingungen) genügen. Die übliche Theorie weist an dieser Stelle eine Lücke auf. Wie man weiß, verfügt die Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten zur Zeit im wesentlichen nur für eine Anzahl wirbelfreier Bewegungen über vollständig ausgeführte Existenzbeweise.

Die in der vorhergehenden Arbeit abgeleiteten potentialtheoretischen Hilfssätze[1]) gestatten den Existenzbeweis für einige Klassen von Wirbelbewegungen inkompressibler Flüssigkeiten zu führen und insbesondere die vorerwähnte Lücke in der allgemeinen Theorie zu schließen. Diese Betrachtungen bilden den Inhalt des ersten Kapitels der vorliegenden Arbeit. Wir behandeln dort (§§ 1 bis 4) vor allem ein Problem, das in anschaulicher, wenn auch unscharfer Formulierung wie folgt gefaßt werden kann (exakte Fassung findet sich in § 1). *In einer allseitig unbegrenzten Masse homogener, inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeit befindet sich zur Zeit t_0 eine geschlossene Wirbelröhre; außerhalb dieser ist die Bewegung wirbelfrei. Im Unendlichen ruht die Flüssigkeit; die auf sie wirkenden*

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie I., Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 72–88.

fte rühren von einem Potential her (sind konservativ). Es ist die egung der Flüssigkeit zu ermitteln, wenn man darüber hinaus weiß, im Unendlichen dauernd Ruhe herrscht.

Die Differentialgleichungen (1) und (2), nebst vorstehenden Anfangs- Grenzbedingungen bestimmen die Bewegung in einem hinreichend zen auf t_0 folgenden Zeitintervall vollkommen und in einer einzigen und Weise. Der Druck ist nur bis auf eine willkürliche additive ktion der Zeit bestimmt.

Die Wirbelröhre kann sich übrigens ins Unendliche erstrecken, die ssigkeit kann zur Zeit t_0 mehrere Wirbelröhren enthalten. Es kann auch um eine Flüssigkeitsmasse handeln, die ein geschlossenes, in annter Weise bewegtes Gefäß, das starr sein kann oder nicht, voll- mmen erfüllt (§ 5). Zur Zeit t_0 befindet sich ganz im Innern der ssigkeitsmasse eine geschlossene Wirbelröhre.

Den Ausgangspunkt des Existenzbeweises bilden jedesmal die Cauchy- en Wirbelgleichungen. Die Benutzung dieser bedeutet einfach die Elimi- ion des Druckes aus den Gleichungen (1). Haben die wirkenden Kräfte, Gegensatz zu den vorstehenden Annahmen kein Potential, so verlieren Cauchyschen Formeln und damit auch die Helmholtzschen Sätze Gültigkeit. Es gelten indessen nach Herrn Friedmann Gleichungen, als Verallgemeinerung der Cauchyschen aufgefaßt werden können und (1) durch Elimination des Druckes hervorgehen[2]). Geht man von neuen Formeln aus, so gelangt man wieder zu einem Existenz- und itätssatz (§ 6). Die prinzipielle Bedeutung der angedeuteten Sätze chtet ein, wenn man beachtet, daß sie bei kompressiblen Flüssigkeiten dieser Form im allgemeinen nicht gelten, vielmehr hier, namentlich bei rhandensein einer Außenhülle, sich in der Flüssigkeitsmasse in der Regel htstationäre Unstetigkeitswellen fortpflanzen werden.

In seiner fundamentalen Abhandlung „Über die Integrale der hydro- namischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“[3]), andelt Helmholtz u. a. die Bewegung einer unbegrenzten Masse homo- ier, inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeit, in der sich zur Zeit t_0 ei beiderseits unbegrenzte parallele, geradlinige Wirbelfäden gleicher samtstärke und unendlich kleinen Querschnitts befinden, während außer- b dieser das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei ist. Helmholtz zeigt, in- n er sich mit einer ersten Näherung begnügt, daß, unter geeigneten raussetzungen im Unendlichen, wenn die wirkenden Kräfte konservativ

[2]) Vgl. A. Friedmann, Sur les tourbillons dans un liquide à temperature iable, C. R. 163 (1916), S. 219–222.

[3]) Journal für Math. 55 (1858), S. 25–55.

sind, die beiden Wirbelfäden um ihren gemeinsamen Schwerpunkt gleichförmig rotieren und die Bewegung der Flüssigkeit, bezogen auf ein System mitrotierender Achsen, permanent ist. Es liegt die Vermutung nahe, daß dieses Resultat *bei geeigneter Formgebung der beiden Wirbelzylinder* in aller Strenge gelten dürfte. Der Querschnitt der Wirbelröhren braucht also nicht notwendig als unendlich klein vorausgesetzt zu werden. In dem zweiten Kapitel der vorliegenden Abhandlung wird ein dahingehender Satz (genaue Formulierung findet sich in § 1) bewiesen. Diese Betrachtungen haben eine starke formale Ähnlichkeit mit gewissen Betrachtungen aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten im zweidimensionalen Falle (rotierende Flüssigkeitszylinder)[4]).

Unter den weiteren Resultaten, die sich auf ähnlichem Wege gewinnen lassen, sei der Existenzbeweis v. Kármánscher Wirbelstraßen (§ 3) hervorgehoben.

Ein anderer Satz von Helmholtz betrifft die Bewegung einer allseitig unbegrenzten Masse homogener, inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeit, in der sich zur Zeit t_0 ein Wirbelfaden mit kreisförmiger Leitlinie und unendlich kleinem Querschnitt befindet, während außerhalb dieses das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei ist. Nach Helmholtz schreitet, bei geeigneten Voraussetzungen im Unendlichen, wenn die auf das System wirkenden Kräfte konservativ sind, der Ring, in einer ersten Näherung, ohne Formänderung parallel mit sich selbst mit konstanter Geschwindigkeit fort[5]). Bezogen auf ein System mitbewegter Achsen ist die Bewegung der Flüssigkeit permanent. Wie in dem dritten Kapitel dieser Arbeit gezeigt wird, gilt *bei geeigneter Formgebung des Wirbelringes* (endlichen Querschnittes) ein entsprechender Satz in voller Strenge. Die Überlegungen des dritten Kapitels sind den Betrachtungen ähnlich, durch die ich vor einiger Zeit die Existenz ringförmiger Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper bewiesen habe[6]).

Die Ergebnisse der §§ 1 bis 4 des ersten Kapitels dieser Arbeit berühren sich, wie aus einer in den C. R. veröffentlichten Note hervorzugehen scheint, mit gewissen Resultaten von Herrn Günther[7]). Nach

---

[4]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 201–218.

[5]) Vgl. loc. cit. [3]).

[6]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 82–118.

[7]) Vgl. N. Günther, Sur un problème d'hydrodynamique, C. R. 177 (1923), S. 865–867. Herr Günther bedient sich a. a. O. eines von dem hier gebrauchten verschiedenen Verfahrens sukzessiver Approximationen. Nähere Angaben über den

er freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Günther wird eine führliche Veröffentlichung dieser Resultate in den Schriften der russischen ademie der Wissenschaften erfolgen. Eine kürzere Fassung wird in der h. Zeitschrift erscheinen.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.
stes Kapitel. Einige Existenzprobleme der Hydrodynamik.
§ 1. Die maßgebende Problemstellung der Helmholtzschen Theorie.
§ 2. Existenzbeweis.
§ 3. Fortsetzung.
§ 4. Schluß des Existenzbeweises und Unitätssatz.
§ 5. Erweiterungen.
§ 6. Ein Existenzsatz bei Abwesenheit des Kräftepotentials.
eites Kapitel. Parallele Wirbelzylinder in einer unbegrenzten Flüssigkeit.
§ 1. Problemstellung und Existenzbeweis.
§ 2. Fortsetzung.
§ 3. Weitere Existenzsätze. Wirbelstraßen von Herrn v. Kármán. Eine neue Fragestellung.
ittes Kapitel. Ein Wirbelring mit kreisförmiger Leitlinie in einer unbegrenzten Flüssigkeit.
§ 1. Problemstellung.
§ 2. Existenzbeweis.
§ 3. Fortsetzung.
§ 4. Fortsetzung.
§ 5. Die Integro-Differentialgleichung des Problems.
§ 6. Eine neue Aufgabe.

Erstes Kapitel.

Einige Existenzprobleme der Hydrodynamik.

§ 1.

Die maßgebende Problemstellung der Helmholtzschen Theorie.

Betrachten wir eine zur Zeit t_0 sich allseitig ins Unendliche erstreckende Masse reibungsloser, unzusammendrückbarer Flüssigkeit konstanter Dichte ϱ, die unter der Wirkung konservativer Kräfte steht. Sei

nvergenzbeweis werden nicht gemacht. Man vergleiche auch eine kurze vorläufige tteilung, die von Herrn Günther dem Kongreß für angewandte Mathematik und chanik in Delft im April 1924 vorgelegt worden ist.

$U(x, y, z, t)$ das Potential der Einheitskräfte; U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ sind für alle in Betracht kommenden Zeiten und alle x, y, z stetige Funktionen ihrer vier Argumente. Für $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ konvergiert U gegen einen festen Wert, den wir gleich Null setzen können. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ verhalten sich im Unendlichen wie $O(R^{-2})$ (Vgl. die Fußnote [48]). Im Unendlichen soll der Druck einen vorgegebenen Wert $p_* = p_*(t)$ haben. Es sei ferner das Geschwindigkeitsfeld u_0, v_0, w_0 zur Zeit t_0 gegeben. Wir nehmen an, daß u_0, v_0, w_0 überall stetig sind und stetige, oder höchstens auf einer sogleich näher zu bezeichnenden Fläche S_0 sprunghaft unstetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben.

Im Unendlichen ruht die Flüssigkeit; in Formeln:

$$u_0 \to 0, \quad v_0 \to 0, \quad w_0 \to 0 \quad \text{für } R \to \infty \text{ wie } O(R^{-2}). \tag{3}$$

Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u_0, v_0, w_0 verhalten sich für $R \to \infty$ entsprechend wie $O(R^{-3})$ und $O(R^{-4})$.

Da es sich um eine unzusammendrückbare Flüssigkeit handelt, so ist

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Wir nehmen weiter an, daß alle Wirbellinien geschlossen sind und eine einzige Wirbelröhre T_0 bilden, deren Begrenzung eine geschlossene doppelpunktfreie, stetig gekrümmte Fläche S_0 vom topologischen Typus der Kreisringfläche (eines Torus) darstellt. Ist etwa $z = f(x, y)$ die Gleichung eines Teiles von S_0, so wird darüber hinaus festgesetzt, daß $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ [8]) genügen:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + h, y + l) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right| \leqq c_1 (|h| + |k|)^{\lambda} \tag{5}$$
$$(0 < \lambda < 1, \ c_1 \text{ konstant}).$$

Die Komponenten des Wirbelvektors

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z}\right), \quad \eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right), \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \text{[9]} \tag{5*}$$

haben in $T_0 + S_0$ stetige, der H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung

---

[8]) Kürzer einer H-Bedingung (mit dem Exponenten λ).

[9]) Wir werden alsbald die Anfangswerte der Koordinaten der Flüssigkeitsteilchen a, b, c, als Lagrangesche Variablen einführen. Für (5*) werden wir dann schreiben:

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}\right), \quad \eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a}\right), \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}\right). \tag{5**}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\xi_0(x+h,\ y+k,\ z+l)-\frac{\partial}{\partial x}\xi_0(x,y,z)\right| \leqq c_3(|h|+|k|+|l|)^\lambda$$

. . . . . .

(c_3 konstant).

Natürlich ist

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x}+\frac{\partial \eta_0}{\partial y}+\frac{\partial \zeta_0}{\partial z}=0.$$

Außerhalb von T_0 sind die Komponenten des Wirbelvektors gleich ll, die Bewegung ist wirbelfrei. Die partiellen Ableitungen zweiter dnung $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}$ erfüllen sowohl in dem Bereiche T_0+S_0, auch in dem Komplementärbereiche[10]) eine H-Bedingung mit dem xponenten λ. Wie man weiß, ist

$$u_0=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{T_0}\frac{1}{r}\eta_0'\,d\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{T_0}\frac{1}{r}\zeta_0'\,d\tau',$$

$$v_0=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{T_0}\frac{1}{r}\zeta_0'\,d\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{T_0}\frac{1}{r}\xi_0'\,d\tau',$$

$$w_0=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{T_0}\frac{1}{r}\xi_0'\,d\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{T_0}\frac{1}{r}\eta_0'\,d\tau',$$

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2, \qquad d\tau'=dx'\,dy'\,dz'.$$

Wir behaupten nun, *daß es für alle t in einem Zeitintervall $\langle t_0, t_0+t^*\rangle$ eine und nur eine Bewegung der betrachteten Flüssigkeitsmasse gibt, die durch die folgenden rein kinematischen Festsetzungen charakterisiert ist. Die Geschwindigkeitskomponenten $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ sind stetig und verschwinden im Unendlichen wie $O(R^{-2})$. Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf x, y, z und t existieren in dem Innenbereich T und dem Außenbereich T_a einer Fläche S von demselben Stetigkeits- und topologischem Charakter wie S_0, sind daselbst stetig, können sich aber auf S sprungweise ändern. Sowohl in dem Bereich T als auch in dem Komplementärbereich genügen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ der H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung verhalten sich für $R\to\infty$ wie $O(R^{-3})$ und $O(R^{-4})$.*

[10]) Wir nennen im folgenden „Gebiet" das, was gelegentlich als „offenes Gebiet" bezeichnet wird. Die abgeschlossene Menge, bestehend aus einem Gebiet und seinem Rand, wird nach einem Vorschlage von Herrn Rosenthal „Bereich" genannt. Wir sprechen von einem Bereiche T_0 oder auch, wenn die Begrenzung mit hervorgehoben werden soll, von einem Bereiche T_0+S_0.

Ferner ist

$$(8^*) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Für $t=t_0$ *ist* $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$.

Die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens a, b, c *ist, unter Zugrundelegung der Eulerschen Variablen, durch die Gleichungen*

$$(9) \quad \frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t), \quad \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t), \quad \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t)$$

und die Anfangsbedingungen $x=a$, $y=b$, $z=c$ *für* $t=t_0$ *bestimmt. Sei diese Bahn*

$$(10) \quad x=x(a,b,c,t) \qquad y=y(a,b,c,t), \qquad z=z(a,b,c,t).^{11})$$

Die Flüssigkeitsteilchen, die sich zur Zeit t_0 *auf* S_0 *befanden, erfüllen zur Zeit* t *die Fläche* S.

Aus dem vorstehenden folgt, wie alsbald gezeigt wird, daß die Funktionen $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ sich auch beim Durchgang durch S stetig verhalten.

Betrachten wir jetzt die Wirbelkomponenten

$$(10^*) \quad \xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

des Vektors u, v, w. *Sie erfüllen die Cauchyschen Relationen*

$$(11) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial x}{\partial a}\xi_0+\frac{\partial x}{\partial b}\eta_0+\frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0, \\ \eta &= \frac{\partial y}{\partial a}\xi_0+\frac{\partial y}{\partial b}\eta_0+\frac{\partial y}{\partial c}\zeta_0, \\ \zeta &= \frac{\partial z}{\partial a}\xi_0+\frac{\partial z}{\partial b}\eta_0+\frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0 \end{aligned}$$

und sind darum in dem Außenbereiche von S *gleich Null. Offenbar ist*

---

[11]) Hier sind offenbar a, b, c, t die Lagrangeschen unabhängigen Veränderlichen (man vgl. die Fußnote 9). Die Funktionen $x(a,b,c,t), \ldots, z(a,b,c,t)$ sind nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowohl in T_0+S_0 als auch in dem Komplementärbereiche stetig. Wie üblich werden dabei (s. die Formeln (9)) die Ableitungen nach der Zeit mit $\frac{d}{dt}$ bezeichnet. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen allein, $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial c^2}$ erfüllen in jedem der beiden Bereiche eine H-Bedingung.

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\eta' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\zeta' d\tau',$$

$$v = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\zeta' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\xi' d\tau',$$

$$w = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\xi' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\eta' d\tau'.$$

Nehmen wir für einen Augenblick an, unsere Behauptung sei bereits iesen.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß ein Beschleunigungspotential tiert.

Wegen (8*) ist vor allem, wie man weiß, $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} = 1$. Aus (11) en sodann für alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$ die Beziehungen

$$\xi\frac{\partial(z,y)}{\partial(b,a)} + \eta\frac{\partial(x,z)}{\partial(b,a)} + \zeta\frac{\partial(y,x)}{\partial(b,a)} = \zeta_0,$$

$$\xi\frac{\partial(z,y)}{\partial(c,b)} + \eta\frac{\partial(x,z)}{\partial(c,b)} + \zeta\frac{\partial(y,x)}{\partial(c,b)} = \xi_0,$$

$$\xi\frac{\partial(z,y)}{\partial(a,c)} + \eta\frac{\partial(x,z)}{\partial(a,c)} + \zeta\frac{\partial(y,x)}{\partial(a,c)} = \eta_0,$$

ür man nach einer leichten Umrechnung auch

$$\frac{\partial(u,x)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial(v,y)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial(w,z)}{\partial(a,b)} = 2\zeta_0,$$

$$\frac{\partial(u,x)}{\partial(b,c)} + \frac{\partial(v,y)}{\partial(b,c)} + \frac{\partial(w,z)}{\partial(b,c)} = 2\xi_0,$$

$$\frac{\partial(u,x)}{\partial(c,a)} + \frac{\partial(v,y)}{\partial(c,a)} + \frac{\partial(w,z)}{\partial(c,a)} = 2\eta_0$$

eiben kann. Da in dem Außenbereich von S_0 sowohl ξ_0, η_0, ζ_0 als h ξ, η, ζ verschwinden, so gelten diese Gleichungen überall.

Sie sind, wie man leicht sieht, die Bedingungen dafür, daß

$$\left(u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} - u_0\right)da + \left(u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b} - v_0\right)db + \left(u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} - w_0\right)dc$$

vollständiges Differential darstellt. Eine Differentiation nach t lehrt, der Ausdruck

$$\left(u'\frac{\partial x}{\partial a} + v'\frac{\partial y}{\partial a} + w'\frac{\partial z}{\partial a}\right)da + \left(u'\frac{\partial x}{\partial b} + v'\frac{\partial y}{\partial b} + w'\frac{\partial z}{\partial b}\right)db + \left(u'\frac{\partial x}{\partial c} + v'\frac{\partial y}{\partial c} + w'\frac{\partial z}{\partial c}\right)dc + \frac{1}{2}d(u^2+v^2+w^2)$$

mit

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad v' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w' = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

darum auch der Ausdruck

$$u'dx + v'dy + w'dz$$

dieselbe Eigenschaft hat. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir schreiben

$$(13) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad Q = Q(x, y, z, t).$$

Die Funktion Q ist sowohl in $T + S$, als auch in dem Komplementärbereiche (im Endlichen) stetig, und, wie sich bald zeigen wird, einwertig.

Fassen wir jetzt die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w als Funktionen von a, b, c und t auf und schreiben wir für einen Augenblick der Deutlichkeit halber

$$u(x, y, z, t) = \mathfrak{u}(a, b, c, t), \ldots .$$

Dann ist

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}, \ldots .$$

Nun ändert sich $\mathfrak{u}(a, b, c, t)$ für alle t beim Durchgang durch S_0 stetig, also ist auch $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = \frac{du}{dt}$ in bezug auf a, b, c stetig. Aus (13) folgt, wenn man vorübergehend

$$Q(x, y, z, t) = \mathfrak{Q}(a, b, c, t)$$

setzt,

$$(**) \quad \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial a} = \frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial a}, \ldots .$$

Da $x(a, b, c, t), \ldots, z(a, b, c, t)$ überall stetig sind, so können nur die Normalableitungen dieser Funktionen beim Übergang durch S_0 (sprungweise) Unstetigkeiten erleiden. Das gleiche gilt wegen (**) bezüglich der vorerst in $T_0 + S_0$ und in dem Komplementärbereiche nur bis auf je eine additive Konstante erklärten Funktion $\mathfrak{Q}$. Also kann $\mathfrak{Q} = Q$ im Endlichen überall stetig angenommen werden. Wie in § 3 gezeigt wird, konvergiert Q, wenn man etwa $Q(0, 0, 0, t)$ beliebig annimmt, für $R \to \infty$ gegen einen festen Wert. Aus allem dem folgt, daß Q einwertig ist. Die in Q noch verfügbare additive Funktion der Zeit wählen wir so, daß $\lim_{R \to \infty} Q = 0$ wird. Der Flüssigkeitsdruck bestimmt sich dann aus der Gleichung

$$(14) \quad p = p_* + \varrho(U - Q).$$

Wegen $U \to 0$, $Q \to 0$ für $R \to \infty$ ist, wie verlangt,

$$(15) \quad \lim_{R \to \infty} p = p_*.$$

Von den Beziehungen (13) und (14) gelangt man in naheliegender Weise
den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (1) und (2). Durch die For-
n (10) ist also eine Bewegung erklärt, die sowohl den hydrodynamischen
chungen (1), (2) als auch den Anfangsbedingungen und den Bedingungen
$, w; \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \to 0$ für $R \to \infty$, $p = p_*$ im Unend-
en genügt[12]). Ist $\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2$ auf S_0 nicht identisch gleich Null, so
eine stationäre Diskontinuität zweiter Ordnung vor[13]).

Wie vorhin auseinandergesetzt, ändern sich $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ beim Über-
g von a, b, c durch S_0, demnach beim Übergang von x, y, z durch S
ig. Also verhalten sich auch $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}$ beim Übergang durch S
ig. Da $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ die gleiche Eigenschaft haben, so sind auch
$\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ auf S stetig. Demgegenüber werden sich $\frac{\partial p}{\partial a}, \frac{\partial p}{\partial b}, \frac{\partial p}{\partial c}$ auf S_0,
emein zu reden, sprungweise ändern.

Durch die soeben skizzierten Überlegungen ist, wie am Schluß des
gezeigt wird, bewiesen, daß es nur *eine* den vorhin angegebenen An-
gs- und Grenzbedingungen genügende Flüssigkeitsbewegung gibt, auch
n beliebige *stationäre* Unstetigkeiten zweiter Ordnung in der Flüssig-
smasse zugelassen werden. Die Flüssigkeitsbewegung, deren Existenz
den §§ 2 bis 4 bewiesen wird, ist, heißt dies, die einzige, die so be-
affen ist, daß $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ stetig sind und
$R \to \infty$ wie $O(R^{-2})$ verschwinden, während ihre partiellen Ableitungen
er und zweiter Ordnung in bezug auf x, y, z, die sich nebenbei bemerkt,
$R \to \infty$ wie $O(R^{-3})$ und $O(R^{-4})$ verhalten, an gewissen Flächen,
dauernd von denselben Flüssigkeitsteilchen erfüllt sind, sprungweise
stetigkeiten erleiden können. Für $t = t_0$ ist schließlich $u = u_0$, $v = v_0$,
$= w_0$. Die Tatsache, daß im vorliegenden Falle S_0 die einzige Unstetig-
sfläche ist, braucht nicht als eine besondere Forderung aufgestellt zu
den, — sie ist stets von selbst erfüllt. Da bei inkompressiblen Flüssig-
ten andere als stationäre Unstetigkeiten nicht vorkommen können, so

---

[12]) Die Bewegung ist, wie man sieht, von p_* unabhängig; da p_* beliebig ge-
lt werden kann, so ist der Druck p durch die übrigen Bedingungen nur bis auf
willkürliche additive Funktion der Zeit bestimmt.

[13]) Bei der von Herrn Hadamard gegebenen Klassifikation unstetiger Flüssig-
sbewegungen wird von geeigneten allgemeinen Lagrangeschen Koordinaten aus-
angen. Hier sind demgegenüber a, b, c einfach kartesische Koordinaten der Flüssig-
steilchen zur Zeit t_0. Darum können schon partielle Ableitungen erster Ordnung
$\ldots, \frac{\partial z}{\partial c}$ für $t > t_0$, allgemein zu reden, auf S_0 sprungweise unstetig sein.

ist die in den §§ 2 bis 4 gefundene Bewegung überhaupt die einzige, welche die vorgeschriebenen Grenz- und Anfangsbedingungen erfüllt.

Die im Laufe der Bewegung bestehenden Unstetigkeiten sind durch die Anfangsbedingungen vollkommen bestimmt. Die Verhältnisse liegen hier anders als bei kompressiblen Flüssigkeiten, insbesondere Gasen, wo bekanntlich in der Regel nichtstationäre Wellen, wesentlich bestimmt durch die Grenzbedingungen, auftreten.

Bevor wir zu dem Existenzbeweise der Funktionen $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ übergehen, machen wir noch eine naheliegende Bemerkung. Man könnte, um die Existenz der fraglichen Bewegung festzustellen, und damit auch, unseren einleitenden Ausführungen gemäß, einer Begründung der Helmholtzschen Theorie zu gewinnen, daran denken, von den Eulerschen Gleichungen

$$(***)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

auszugehen. Dies setzt zunächst voraus, daß für $t = t_0$ die Werte von u, v, w, p bekannt sind. Tatsächlich ist für $t = t_0$ der Druck unbekannt; statt dessen ist das Verhalten der Geschwindigkeitskomponenten im Unendlichen für alle t vorgeschrieben. Dann aber haben die Gleichungen (***) nicht die Normalform. Man muß sich darum nach einer anderen Möglichkeit umsehen und beispielsweise versuchen, den Druck aus den Gleichungen (***) zu eliminieren. Man kommt dann mit Cauchy und Helmholtz zu den Gleichungen (9), (11) und (12), die den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bilden. Wie sich bald zeigen wird, bildet die Hauptschwierigkeit bei dem Existenzbeweis das Vorhandensein von (sprungweisen) Unstetigkeiten der Wirbelkomponenten.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn es sich um zusammendrückbare Flüssigkeiten handelt, weil dann für die letzte der Gleichungen (***) die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w) = 0$$

eintritt. Wir erhalten dann ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in der Normalform, auch sind für $t = t_0$ die Werte von u, v, w und ϱ, mithin auch von p (aus der Zustandsgleichung) als bekannt anzusehen. Doch bringen diesmal, wie man weiß, die Unstetigkeit

Wirbelkomponenten und die Grenzbedingungen Schwierigkeiten anderer mit sich. Wie vorhin erwähnt, werden sich in der Flüssigkeitsmasse tstationäre Unstetigkeitswellen ausbreiten, die in der Regel mitbestimmt den müssen.

Wie diese beiden verschiedenen Fälle unter einen Hut zu bringen mit anderen Worten, wie weit und in welchem Sinne sich eine inpressible Flüssigkeit als Grenze einer zusammendrückbaren auffassen ist ein, so weit ich sehe, noch offenes Problem.

§ 2.

Existenzbeweis.

Es handelt sich also um den Existenzbeweis von Funktionen $x(a, b, c, t)$, $b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$, die den Beziehungen (9), (12) und (11) sowie Anfangsbedingungen

$$x(a, b, c, t_0) = a, \qquad y(a, b, c, t_0) = b, \qquad z(a, b, c, t_0) = c$$

igen. Aus (9), (12) und (16) folgt augenscheinlich

$$x = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_T \frac{1}{r} \eta' d\tau' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_T \frac{1}{r} \zeta' d\tau' \right\},$$

$$y = b + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_T \frac{1}{r} \zeta' d\tau' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_T \frac{1}{r} \xi' d\tau' \right\},$$

$$z = c + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_T \frac{1}{r} \xi' d\tau' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_T \frac{1}{r} \eta' d\tau' \right\}.$$

Diese Gleichungen bilden im Verein mit (11) *ein System von Integrodifferentialgleichungen zur Bestimmung von* x, y, z. Man beachte, daß Volumintegrale über einen vorerst noch nicht bekannten, sich mit der ändernden Bereich T, das Bild des Bereiches T_0 zur Zeit t, erckt sind.

Der Existenzbeweis der Lösung wird durch sukzessive Approximationen acht. Wir setzen in einer ersten Näherung

$$x_1 = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial c} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \eta_0' d\tau_0' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial b} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \zeta_0' d\tau_0' \right\},$$

. . . . . .

$$z_1 = c + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial b} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \xi_0' d\tau_0' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \eta_0' d\tau_0' \right\}.$$

Nach bekannten Sätzen haben die Volumintegrale sowohl in $T_0 + S_0$ als auch in dem Komplementärbereiche stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen dritter Ordnung[14]). Die Funktionen x_1, y_1, z_1 besitzen darum in den gleichen Bereichen stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Die Funktionen $\frac{\partial^2 x_1}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z_1}{\partial c^2}$ erfüllen eine H-Bedingung. Für hinreichend kleine $t - t_0$ wird durch die Gleichungen (18) eine topologische Abbildung des Bereiches T_0 auf einen, mit t variablen, Bereich T_1 erklärt. Die Randfläche S_1 von T_1 ist von demselben topologischen und Stetigkeitscharakter wie die Fläche S_0.

Wir gehen jetzt zu der zweiten Näherung über und setzen

$$x_2 = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \eta_1' \, d\tau_1' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \zeta_1' \, d\tau_1' \right\},$$

(19) . . . . . .

$$z_2 = c + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \xi_1' \, d\tau_1' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \eta' \, d\tau' \right\},$$

$$\xi_1 = \frac{\partial x_1}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial x_1}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial x_1}{\partial c} \zeta_0,$$

(20) . . . . . .

$$\zeta_1 = \frac{\partial z_1}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial z_1}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial z_1}{\partial c} \zeta_0.$$

Die Werte ξ_1, η_1, ζ_1, aufgefaßt als Funktionen von a, b, c, haben in $T_0 + S_0$ augenscheinlich stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung. Sie sind offenbar von gleicher Natur, wenn man sie als Funktionen von x_1, y_1, z_1 in $T_1 + S_1$ ansieht. Hieraus folgt ähnlich wie vorhin, daß die in (19) rechter Hand stehenden Ausdrücke sowohl in $T_1 + S_1$ als auch in dem Komplementärbereiche stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf x_1, y_1, z_1 haben. Als Funktionen von a, b, c aufgefaßt, haben dementsprechend x_2, y_2, z_2 stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen; $\frac{\partial^2 x_2}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z_2}{\partial c^2}$ erfüllen die H-Bedingung. Durch (19) wird für hinreichend kleine $t - t_0$ eine topologische Abbildung des Bereiches T_0 auf einen mit t veränderlichen Bereich T_2 erklärt. Seine Randfläche S_2 verhält sich, sowohl was ihren topologischen Charakter als auch was ihre Stetigkeitseigenschaften betrifft, wie S_0.

---

[14]) Vgl. A. Korn, Sur les équations de l'élasticité, Annales de l'École Normale (3), 24 (1907), S. 9—75, insb. S. 29—30. Eine Zusammenstellung der Sätze dieser Art nebst genauen Literaturangaben findet sich in meinem Encyklopädieartikel II C 3, S. 199—210. Siehe auch meine unmittelbar vorangehende Abhandlung, § 5.

Eine dritte Approximation wird jetzt durch die Gleichungen

$$x_3 = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{T_2} \frac{1}{r_2} \eta_2' \, d\tau_2' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_2} \int_{T_2} \frac{1}{r_2} \zeta_2' \, d\tau_2' \right\},$$

. . . . . .

$$z_3 = c + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_2} \int_{T_2} \frac{1}{r_2} \xi_2' \, d\tau_2' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{T_2} \frac{1}{r_2} \eta_2' \, d\tau_2' \right\},$$

$$\xi_2 = \frac{\partial x_2}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial x_2}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial x_2}{\partial c} \zeta_0,$$

. . . . . .

$$\zeta_2 = \frac{\partial z_2}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial z_2}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial z_2}{\partial c} \zeta_0$$

eben. Es steht nichts im Wege, den durch (21) und (22) erklärten ationsprozeß unbegrenzt zu wiederholen und zu den Annäherungsfunk-en $x_4, y_4, z_4; \ldots; x_n, y_n, z_n; \ldots$ überzugehen, sofern für $\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)$, $x_n - a), \ldots, \frac{\partial}{\partial c}(z_n - c)$ eine für alle t in einem festen Intervalle $t_0 + t^*\rangle$, alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$ und alle n gleichmäßig geltende ranke,

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_n - c)\right| \leqq \alpha_0,$$

angeben läßt, unter α_0 einen hinreichend kleinen Wert verstanden. der Tat wird dann für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ und alle n, wie sogleich eigt werden wird, durch Vermittlung der Funktionen

$$x_n = x_n(a, b, c, t), \ldots, z_n = z_n(a, b, c, t)$$

topologische Abbildung des Bereiches T_0 auf einen Bereich T_n erklärt, en Begrenzung, da auch $\frac{\partial^2 x_n}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z_n}{\partial c^2}$ nach dem vorstehenden existieren der H-Bedingung genügen, sich topologisch und bezüglich der Stetig-seigenschaften wie S_0 verhält.

Sollte im Gegensatz zu unserer Behauptung durch Vermittlung von) für einen Wert $\bar{t}$ in $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ zwei verschiedenen Punkten in T_0, $b^{(1)}, c^{(1)})$ und $(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)})$, derselbe Punkt zugeordnet sein, so würde, Abkürzung

$$x_n(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)}, \bar{t}) - a^{(1)} = (x_n - a)^{(1)}, \ldots$$

etzt,

$$a^{(1)} + (x_n - a)^{(1)} = a^{(2)} + (x_n - a)^{(2)},$$

. . . . . .

$$c^{(1)} + (z_n - c)^{(1)} = c^{(2)} + (z_n - c)^{(2)}$$

sein. Für (26) kann man weiter schreiben

$$(a^{(1)}-a^{(2)})\Big(1+\frac{\tilde{\partial}}{\partial a}(x_n-a)\Big)+(b^{(1)}-b^{(2)})\frac{\tilde{\partial}}{\partial b}(x_n-a)$$
$$+(c^{(1)}-c^{(2)})\frac{\tilde{\partial}}{\partial c}(x_n-a)=0,$$

(27) . . . . . .

$$(a^{(1)}-a^{(2)})\frac{\tilde{\tilde{\partial}}}{\partial a}(z_n-c)+(b^{(1)}-b^{(2)})\frac{\tilde{\tilde{\partial}}}{\partial b}(z_n-c)$$
$$+(c^{(1)}-c^{(2)})\Big(1+\frac{\tilde{\tilde{\partial}}}{\partial c}(z_n-c)\Big)=0,$$

unter $\frac{\tilde{\partial}}{\partial a}(x_n-a)$, ... den Wert der fraglichen Ableitung für einen gewissen auf der Verbindungsgeraden von $(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$ und $(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)})$ gelegenen Punkt verstanden. Für hinreichend kleines α_0 ist die Determinante der linearen Gleichungen (27) augenscheinlich von Null verschieden, unsere Behauptung mithin bewiesen.

§ 3.

Fortsetzung.

Daß sich für alle t in $\langle t_0, t_0+t^*\rangle$ eine obere Schranke α_0, wie übrigens auch eine Schranke für $\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_n-a)\right|$, ... angeben läßt, wird aus der Betrachtung der Differenzen $x_{n+1}-x_n$, $y_{n+1}-y_n$, $z_{n+1}-z_n$ erschlossen. Wie sich bald zeigen wird, konvergieren die Funktionenfolgen x_n, y_n, z_n für hinreichend kleine $t-t_0$ gleichmäßig gegen bestimmte Grenzfunktionen, die Lösungen des Problems.

Nach (18), (19) und (21) ist für alle $n \geqq 1$

$$x_{n+1}-x_n=\int_{t_0}^{t} dt\Big\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_n}\int_{T_n}\frac{1}{r_n}\eta_n' d\tau_n'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_n}\int_{T_n}\frac{1}{r_n}\zeta_n' d\tau_n'$$
(28)
$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\int_{T_{n-1}}\frac{1}{r_{n-1}}\eta_{n-1}' d\tau_{n-1}'-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\int_{T_{n-1}}\frac{1}{r_{n-1}}\zeta_{n-1}' d\tau_{n-1}'\Big\},$$

. . . . . .

Gesetzt, für alle $n \leqq l$, alle t in $\langle t_0, t_0+t^*\rangle$ und alle (a, b, c) in T_0+S_0 ist, unter Ω_0 einen hinreichend kleinen Wert verstehend,

$$|x_n - a|, \ldots, |z_n - c|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_n - c)\right|;$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_n - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial c^2}(z_n - c)\right| \leqq \Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_n - a)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_n - a)\right)^{(2)}\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

$$d_{12}^2 = (a^{(1)} - a^{(2)})^2 + (b^{(1)} - b^{(2)})^2 + (c^{(1)} - c^{(2)})^2.$$ [15])

möge ferner

$$|x_l - x_{l-1}|, \ldots, |z_l - z_{l-1}|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_l - z_{l-1})\right|;$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_l - x_{l-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial c^2}(z_l - z_{l-1})\right| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_l - x_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_l - x_{l-1})\right)^{(2)}\right| \leqq \Omega d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

. Aus

$$\xi_n = \frac{\partial x_n}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x_n}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x_n}{\partial c}\zeta_0,$$

. . . . . .

gt, wie man leicht sieht, für alle $n \leqq l$

$$|\xi_n - \xi_0|, \ldots; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(\xi_n - \xi_0)\right|, \ldots \leqq \alpha^{(1)}\Omega_0,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(\xi_n - \xi_0)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(\xi_n - \xi_0)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \alpha^{(1)}\Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \ldots,$$

er $\alpha^{(1)}$ gewisse positive Konstante verstanden, wie später unter
$, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Wegen

$$\xi_l - \xi_{l-1} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1}) + \eta_0 \frac{\partial}{\partial b}(x_l - x_{l-1}) + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial c}(x_l - x_{l-1}),$$

. . . . . .

weiter

$$|\xi_l - \xi_{l-1}|, \ldots; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(\xi_l - \xi_{l-1})\right|, \ldots \leqq \alpha_1 \Omega,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(\xi_l - \xi_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(\xi_l - \xi_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \alpha_1 \Omega d_{12}^{\lambda}, \ldots.$$

e bekannten Hilfssätze der Potentialtheorie von O. Hölder, A. Liapounoff
d A. Korn[16]) ergeben jetzt Beziehungen von der Form

[15]) In (29) bezeichnet bsp. $\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_n - a)\right)^{(1)}$ den Wert von $\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_n - a)$ im
kte $(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$.

[16]) Die Literatur findet sich in meinem Encyklopädieartikel II C 3, S. 199—209
egeben.

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_n}\int_{T_n}\frac{1}{r_n}\eta_n' d\tau_n'\right| \leqq \alpha^{(2)}, \ldots; \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\int_{T_n}\right| \leqq \alpha^{(2)}, \ldots, \left|\frac{\partial^3}{\partial z_n^3}\int_{T_n}\right| \leqq \alpha^{(2)}, \ldots,$$

(33)

$$\left|\left(\frac{\partial^3}{\partial z_n^3}\int_{T_n}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^3}{\partial z_n^3}\int_{T_n}\right)^{(2)}\right| \leqq \alpha^{(2)} d_{12}^{\lambda}, \ldots \qquad (n \leqq l).$$

Aus einem in den §§ 3 und 4 der unmittelbar vorhergehenden Abhandlung bewiesenen neuen Hilfssatz folgen sodann für alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$ die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_l}\int_{T_l}\frac{1}{r_l}\eta_l' d\tau_l' - \frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int_{T_{l-1}}\frac{1}{r_{l-1}}\eta_{l-1}' d\tau_{l-1}'\right| \leqq \alpha_2 \Omega, \ldots;$$

$$(33^*) \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int_{T_l} - \frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int_{T_{l-1}}\right| \leqq \alpha_2 \Omega, \ldots; \quad \left|\frac{\partial^3}{\partial z_l^3}\int_{T_l} - \frac{\partial^3}{\partial z_{l-1}^3}\int_{T_{l-1}}\right| \leqq \alpha_2 \Omega, \ldots$$

$$\left|\left(\frac{\partial^3}{\partial z_l^3}\int_{T_l} - \frac{\partial^3}{\partial z_{l-1}^3}\int_{T_{l-1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^3}{\partial z_l^3}\int_{T_l} - \frac{\partial^3}{\partial z_{l-1}^3}\int_{T_{l-1}}\right)^{(2)}\right| \leqq \alpha_2 \Omega d_{12}^{\lambda}, \ldots.$$

Der fragliche Hilfssatz lautet wie folgt:

Es seien zwei Bereiche T_l und T_{l-1} vorgelegt, die aus T_0 durch die topologischen Abbildungen erzeugt werden, bei denen (a, b, c) entsprechend in (x_l, y_l, z_l) und $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$ übergeht[17]). Bekannt ist zunächst, daß x_l, y_l, z_l und $x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}$ die Beziehungen (29) und (30) erfüllen. Betrachten wir die beiden Newtonschen Potentiale

$$V_l(x_l, y_l, z_l) = \int_{T_l}\frac{1}{r_l}\xi_l' d\tau_l' \quad \text{und}$$

(34)

$$V_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) = \int_{T_{l-1}}\frac{1}{r_{l-1}}\xi_{l-1}' d\tau_{l-1}'.$$ [18])

Erfüllen nun noch die Dichten ξ_l und ξ_{l-1} die Beziehungen (32), so gelten die Ungleichheiten (33*). An der genannten Stelle wird angenommen, daß die Dichte in den zusammengehörigen Punkten von T_l und T_{l-1} denselben Wert hat. Es macht nicht die geringsten Schwierigkeiten, zu dem hier betrachteten, nur unwesentlich allgemeineren Falle überzugehen[19]).

---

[17]) A. a O. ist von den Bereichen $\hat{T}$, $\dot{T}$ und T die Rede. Für (a, b, c), (x_l, y_l, z_l) und $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$ treten dort (x, y, z), $(x+\hat{\xi}, y+\hat{\eta}, z+\hat{\zeta})$, $(x+\dot{\xi}, y+\dot{\eta}, z+\dot{\zeta})$ ein.

[18]) Sie heißen dort $\hat{V}$ und $\dot{V}$.

[19]) Man vergleiche übrigens die Bemerkungen am Schluß des § 1 der zitierten Abhandlung.

Es ist nun weiter in $T_0 + S_0$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int_{T_l}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int_{T_{l-1}}\right)$$

$$= \frac{\partial z_l}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int_{T_l} + \frac{\partial y_l}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_l \partial y_l}\int_{T_l} + \frac{\partial x_l}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_l \partial x_l}\int_{T_l}$$

$$- \frac{\partial z_{l-1}}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int_{T_{l-1}} - \frac{\partial y_{l-1}}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}\partial y_{l-1}}\int_{T_{l-1}} - \frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}\partial x_{l-1}}\int_{T_{l-1}}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int_{T_l} - \frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int_{T_{l-1}}\right)\frac{\partial z_l}{\partial a} + \left(\frac{\partial z_l}{\partial a} - \frac{\partial z_{l-1}}{\partial a}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int_{T_{l-1}} + \cdots.$$

Rücksicht auf (29), (30), (33) und (33*) folgt hieraus

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int_{T_l}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int_{T_{l-1}}\right)\right| \leqq \alpha_3\,\Omega.$$

ähnlicher Weise gelangt man zu den Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int_{T_l}\right) - \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int_{T_{l-1}}\right)\right| \leqq \alpha_4\,\Omega,$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int_{T_l}\right) - \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int_{T_{l-1}}\right)\right)^{(1)}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int_{T_l}\right) - \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int_{T_{l-1}}\right)\right)^{(2)}\right| \leqq \alpha_4\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}.$$

loge Beziehungen gelten für die anderen in (28) vorkommenden Volumgrale. Aus (36), (37) und (28) ergeben sich jetzt die weiteren Beungen

$$|x_{l+1} - x_l|,\ \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1} - x_l)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^3}{\partial a^3}(x_{l+1} - x_l)\right|, \ldots \leqq \alpha_5\,\Omega\,|t - t_0|,$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_{l+1} - x_l)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_{l+1} - x_l)\right)^{(2)}\right| \leqq \alpha_5\,\Omega\,|t - t_0|\,d_{12}^{\lambda},$$

ie die analogen Beziehungen für $|y_{l+1} - y_l|, \ldots$; $|z_{l+1} - z_l|, \ldots$. Wie n sich leicht überzeugt, gelten die Ungleichheiten (29) und (30) für 1 mit $x_{l-1} = a$, $y_{l-1} = b$, $z_{l-1} = c$, sofern $|t - t_0|$ hinreichend klein enommen wird, etwa

*) $$|t - t_0| \leqq \bar{t}.$$ [20]

[20]) Im vorliegenden Falle genügt es, augenscheinlich (30) zu erfüllen, die Beungen (29) sind dann erst recht erfüllt.

Setzt man t^* gleich der kleineren der beiden Zahlen $\bar{t}$ und $\frac{1}{2\alpha_5}$, so findet man fast unmittelbar, daß für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ die Beziehungen (29) und (30) für alle l erfüllt sind.

In der Tat ist wegen (38) und (38*) für alle $l \geqq 1$

$$|x_{l+1} - x_l|, \ldots \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^l \Omega, \ldots$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_{l+1} - x_l)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_{l+1} - x_l)\right)^{(2)}\right| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^l \Omega\, d_{12}^{\lambda}$$

. . . . . .

und darum für alle $n > 1$ beispielsweise

$$|x_n - a| \leqq |x_1 - a| + |x_2 - x_1| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| \leqq \Omega + \frac{1}{2}\Omega + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\Omega < 2\Omega \leqq \Omega_0.$$

Die unendlichen Reihen

$$x_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1}), \quad \frac{\partial x_1}{\partial a} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}(x_n - x_{n-1}), \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial a^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_n - x_{n-1}); \ \ldots$$

konvergieren in $T_0 + S_0$ für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ unbedingt und gleichmäßig [21]).

Sei

$$x = x_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1}), \ \ldots, \ z = z_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(z_n - z_{1-1}). \tag{40}$$

Offenbar haben x, y, z für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ und alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$ stetige Abteilungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf a, b und c.

Aus den Ungleichheiten (29), die für alle n gelten, folgen durch Grenzübergang für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ die weiteren Beziehungen

$$|x - a|, \ldots, |z - c|; \left|\frac{\partial}{\partial a}(x - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z - c)\right|;$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial c^2}(z - c)\right| \leqq \Omega_0, \tag{41}$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x - a)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x - a)\right)^{(2)}\right| \leqq \Omega_0\, d_{12}^{\lambda}, \ldots.$$

[21]) Augenscheinlich konvergieren (39) wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$.

Aus (18), (19), (21) und den analogen Gleichungen für x_4, y_4, z_4; $, z_5$; ... folgt für $n \to \infty$ mit Rücksicht auf den vorhin bereits be- en fundamentalen Hilfssatz für alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$

$$x = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_T \frac{1}{r} \eta' \, d\tau' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_T \frac{1}{r} \zeta' \, d\tau' \right\},$$

. . . . . .

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c} \zeta_0$$

. . . . . .

In (42) bezeichnet $T + S$ denjenigen Bereich, der $T_0 + S_0$ durch die hungen $x = x(a, b, c, t)$, $y = y(a, b, c, t)$, $z = z(a, b, c, t)$ zu- lnet ist.

In der Tat besagt dieser Hilfssatz u. a. folgendes:

Sei $\tilde{T} + \tilde{S}$ irgendein Bereich, der aus $T_0 + S_0$ durch die topologische ldung $x = \tilde{x}(a, b, c, t), \ldots, z = \tilde{z}(a, b, c, t)$ entsteht. Es wird an- nmen, daß $\tilde{x} - a$, $\tilde{y} - b$, $\tilde{z} - c$ für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ den zu analogen Gleichungen genügen und außerdem die weiteren Beziehungen

$$|x - \tilde{x}|, \ldots, |z - \tilde{z}|; \left| \frac{\partial}{\partial a}(x - \tilde{x}) \right|, \ldots, \left| \frac{\partial}{\partial c}(z - \tilde{z}) \right|;$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial a^2}(x - \tilde{x}) \right|, \ldots, \left| \frac{\partial^2}{\partial c^2}(z - \tilde{z}) \right| \leqq \bar{\Omega},$$

$$\left| \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x - \tilde{x}) \right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x - \tilde{x}) \right)^{(2)} \right| \leqq \bar{\Omega} \, d_{12}^{\lambda}, \ldots,$$

$$\left(\bar{\Omega} \leqq \frac{1}{2} \Omega_0 \right)$$

n. Alsdann ist beispielsweise

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \int_T \frac{1}{r} \eta' \, d\tau' - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \int_{\tilde{T}} \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{\eta}' \, d\tilde{\tau}' \right| \leqq \alpha_6 \, \bar{\Omega},$$

$\tilde{r}$ den Abstand der beiden (a, b, c) und (a', b', c') entsprechenden te in $\tilde{T} + \tilde{S}$, $\tilde{\eta}'$ den zu η analogen Wert, $d\tilde{\tau}'$ das Volumelement be- nen.

Für $\bar{\Omega} \to 0$ folgt hieraus

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \int_{\tilde{T}} \frac{1}{\tilde{r}} \eta' \, d\tilde{\tau}' \to \frac{\partial}{\partial z} \int_T \frac{1}{r} \eta' \, d\tau'.$$

Grenzübergang ist für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ gleichmäßig.

Derselbe Hilfssatz gestattet jetzt den Schluß, daß die unendlichen Reihen (40), in denen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ nach wie vor durch die Formeln (18), (19), ... erklärt sind, auch in dem *Komplementärbereiche* von $T_0 + S_0$ gegen die durch (42) dargestellten Funktionen unbedingt und gleichmäßig konvergieren. Die Funktionen (42) haben offenbar in dem Komplementärbereiche (die Randfläche S_0 eingeschlossen) stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung $\frac{\partial x}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}; \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial c^2}$. Die zuletzt genannten partiellen Ableitungen erfüllen eine H-Bedingung. Beim Passieren von S_0 erleiden die Normalableitungen erster Ordnung der Funktionen $x = x(a, b, c, t)$, $y = y(a, b, c, t)$, $z = z(a, b, c, t)$ im allgemeinen einen Sprung, die Tangentialableitungen ändern sich, wie man weiß, stetig.

Augenscheinlich ist S der geometrische Ort der auf S_0 befindlichen Teilchen zur Zeit t.

Aus (42) folgt durch Differentiation

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\zeta'\,d\tau',$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\xi'\,d\tau', \tag{44}$$

$$w = \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\eta'\,d\tau'.$$

Offenbar sind u, v, w überall stetig und haben sowohl in $T + S$ als auch in dem Komplementärbereiche stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen. Die Tangentialableitungen erster Ordnung ändern sich auch beim Durchgang durch S stetig, während die Normalableitungen auf S im allgemeinen einen Sprung erleiden. Für $R \to \infty$ verschwinden u, v, w wie $O(R^{-2})$. Es gilt, für alle nicht auf S befindlichen (x, y, z),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{45}$$

darum, zunächst außer auf S_0, da es sich also um eine Bewegung inkompressibler Flüssigkeit handelt,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1. \tag{46}$$

Nunmehr lehrt eine Differentiation der Formeln (43) nach einigen Umformungen mit Rücksicht auf die aus (46) folgenden Formeln

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 0 \tag{47}$$

alle (x, y, z) im Innern von T

3) $$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Aus Gründen der Stetigkeit gilt diese Beziehung auch noch auf S. s gleiche läßt sich von den beiden Formeln (45) und (46) sagen. Nach kannten Sätzen folgen jetzt aus (44) und (48) die Formeln

9) $$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

amit sind alle in dem § 1 angekündigten Beziehungen gewonnen.

§ 4.

Schluß des Existenzbeweises und Unitätssatz.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß u, v, w sowohl in $T+S$ als auch dem Komplementärbereiche stetige Ableitungen erster und zweiter rdnung haben und daß $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ in den beiden Bereichen einer H-Bengung genügen. Was die Ableitungen in bezug auf die Ortsveränderhen allein betrifft, so folgt unsere Behauptung, angesichts der Formeln 4), ohne weiteres aus den bekannten Sätzen der Potentialtheorie[23]). un aber die Ableitung $\frac{du}{dt}$. Aus

50)
$$\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\eta' d\tau' = \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial}{\partial a}\int_T + \frac{\partial b}{\partial z}\frac{\partial}{\partial b}\int_T + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{\partial}{\partial c}\int_T$$
$$= \left\{\frac{\partial(x,y)}{\partial(b,c)}\frac{\partial}{\partial a}\int_T + \frac{\partial(x,y)}{\partial(c,a)}\frac{\partial}{\partial b}\int_T + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\frac{\partial}{\partial c}\int_T\right\}$$

nd den analogen Formeln für die übrigen Integralausdrücke in (44) olgt, daß es genügt, die Existenz der Ableitungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\int_T \frac{1}{r}\eta' d\tau', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial b}\int_T \frac{1}{r}\eta' d\tau', \ \ldots$$

u zeigen. Wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten dartun läßt, sind ie fraglichen Ableitungen vorhanden, und es gilt z. B.

---

[23]) Vgl. bsp. A. Korn, l. c. [14]). Auf die Existenz und Stetigkeit der fraglichen bleitungen ist übrigens bereits am Schluß des § 3 hingewiesen worden.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\int_T \frac{1}{r}\eta'\,d\tau' = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\int_{T_0}\frac{1}{r}\eta'\,da'\,db'\,dc'$$

(51)

$$= \int_{T_0}\left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{r}\right)\eta' + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\eta'}{dt}\right\}da'\,db'\,dc'.\ ^{23})$$

Aus dieser und den hierzu analogen Formeln folgt nach einigen Umformungen

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\int_T\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int_T\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\right)\zeta'\,d\tau'$$

(51*)

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\eta'}{dt}\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int_T\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\zeta'}{dt}\,d\tau'.\ ^{24})$$

Die Funktionen $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ sind zunächst für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ und alle (a, b, c) sowohl in $T_0 + S_0$ als auch in dem Komplementärbereiche stetig.

Da u, v, w, als Funktionen von a, b, c, t aufgefaßt, sich beim Übergang durch S_0 stetig ändern, so sind, worauf schon in § 1 hingewiesen wurde, $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ für jeden in Betracht kommenden Wert von t durchweg stetige Ortsfunktionen. Es ist schließlich aus (50) und (51) nicht schwer zu ersehen, daß diese Beschleunigungskomponenten für $R \to \infty$ verschwinden, und zwar für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ gleichmäßig. Es gelten Beziehungen von der Form

$$\left|\frac{du}{dt}\right|, \left|\frac{dv}{dt}\right|, \left|\frac{dw}{dt}\right| \leqq \bar{\alpha} R^{-2} \qquad (\bar{\alpha}\ \text{konstant}) \tag{51*}$$

Aus (51*) folgt, wie a. a. O. bemerkt wurde, daß das durch die Formeln (13) erklärte Beschleunigungspotential Q, wenn man etwa

---

[23]) Es gilt, was dabei zu beachten ist, beispielsweise

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{r}\right) = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{r^3}\left[(x-x')\frac{\partial x}{\partial a} + (y-y')\frac{\partial y}{\partial a} + (z-z')\frac{\partial z}{\partial a}\right]\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{(x-x')}{r^3}\frac{\partial x}{\partial a}\right\} = \frac{1}{r^3}\left[(u-u')\frac{\partial x}{\partial a} + (x-x')\frac{\partial u}{\partial a}\right] - \frac{3}{2}\frac{x-x'}{r^5}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{dr^2}{dt},$$

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = (x-x')(u-u') + (y-y')(v-v') + (z-z')(w-w').$$

[24]) Es gilt beispielsweise

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{d}{dt}\frac{z-z'}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right) + \frac{3}{2}\frac{z-z'}{r^5}\frac{dr^2}{dt} = -\frac{1}{r^3}(w-w')$$

$$+3\frac{z-z'}{r^5}\{(x-x')(u-u') + (y-y')(v-v') + (z-z')(w-w')\}.$$

$(0, 0, 0, t)$ beliebig vorschreibt, für $R \to \infty$ gegen einen festen Wert konvergiert.

Aus den vorstehenden Betrachtungen (vgl. die Formeln (36), (37) und (38)) folgt fast unmittelbar, daß auch die unendlichen Reihen

$$u_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(u_n - u_{n-1}), \quad v_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(v_n - v_{n-1}), \quad w_1 + \sum_{w=2}^{\infty}(w_n - w_{n-1}),$$

$$\left(u_n = \frac{dx_n}{dt}, \quad v_n = \frac{dy_n}{dt}, \quad w_n = \frac{dz_n}{dt}\right),$$

sowie die Reihen, die man durch einmalige und zweimalige Differentiation der vorstehenden Entwicklungen nach den Ortsvariablen erhält, für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ und alle (a, b, c) sowohl in $T_0 + S_0$, als auch in dem Komplementärbereiche wie geometrische Reihen konvergieren. Eine aufmerksame Betrachtung der Formeln, die aus (50) und (51) entstehen, wenn man dort $x, y, z; \ldots$ durch $x_n, y_n, z_n; \ldots$ ersetzt, lehrt, daß das gleiche auch für die Reihen

$$\frac{du_1}{dt} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{du_n}{dt} - \frac{du_{n-1}}{dt}\right), \ \ldots, \ \frac{dw_1}{dt} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{dw_n}{dt} - \frac{dw_{n-1}}{dt}\right)$$

gilt. Es bestehen, genauer, Ungleichheiten von der Form

$$(51^{**}) \qquad \left|\frac{du_n}{dt} - \frac{du_{n-1}}{dt}\right| \leqq \text{konst.} \left|\frac{1}{2}\right|^{n-2} R^{-2}, \ldots.$$

Durch weiteres Fortspinnen dieser Überlegungen ließe sich auch die Existenz der Ableitungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial a}, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial c}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2v}{dt^2}, \frac{d^2w}{dt^2}$ erschließen. Wir können auf diese nicht ganz einfachen Untersuchungen auf dieser Stelle um so eher verzichten, als bei den Betrachtungen am Schluß des § 1, wo es sich um den Übergang zu den Euler-Lagrangeschen Gleichungen handelte, von jenen Ableitungen kein Gebrauch gemacht wurde.

Die Lösungen x, y, z, deren Existenz in dem vorstehenden bewiesen worden ist, sind die einzigen ihrer Art. Es sei, in der Tat, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ irgendein System von Funktionen, die in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ erklärt sind, dieselben Stetigkeitseigenschaften wie x, y, z haben (vgl. § 1) und die Integro-Differentialgleichungen

$$(52) \qquad \bar{x} = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_{\bar{T}} \frac{1}{\bar{r}} \bar{\eta}' \, d\bar{\tau}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \int_{\bar{T}} \frac{1}{\bar{r}} \bar{\xi}' \, d^{-\prime} \right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\bar{\xi} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial c}\zeta_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

erfüllen. Wir beweisen, daß identisch $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z$ gilt.

Aus Gründen der Stetigkeit folgt zunächst, daß für hinreichend kleine $t - t_0$, etwa für alle t in $\langle t_0, t_0 + t_* \rangle$, $(t_* \leqq t^*)$ und alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$

$$|\bar{x} - a|, \ldots, |\bar{z} - c|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(\bar{x} - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\bar{z} - c)\right|;$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{x} - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial c^2}(\bar{z} - c)\right| \leqq \Omega_0, \tag{53}$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{x} - a)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{x} - a)\right)^{(2)}\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \tag{53*}$$

. . . . . .

ist[25]). Es ist nun weiter

$$\bar{x} - x_n = \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_{\bar{T}} \frac{1}{\bar{r}}\, \bar{\eta}'\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \int_{\bar{T}} \frac{1}{\bar{r}}\, \bar{\xi}'\, d\bar{\tau}' \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \int_{T_{n-1}} \frac{1}{r_{n-1}}\, \eta'_{n-1}\, d\tau'_{n-1} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} \int_{T_{n-1}} \frac{1}{r_{n-1}}\, \zeta'_{n-1}\, d\tau'_{n-1} \right\}, \tag{54}$$

. . . . . .

Wie bei den entsprechenden Betrachtungen, die sich an die Formeln (28 anschließen, finden wir, wenn etwa

$$|\bar{x} - x_{n-1}|, \ldots, |\bar{z} - z_{n-1}|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(\bar{x} - x_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\bar{z} - z_{n-1})\right|$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{x} - x_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial c^2}(\bar{z} - z_{n-1})\right| \leqq \Omega^*; \tag{55}$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{x} - x_{n-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{x} - x_{n-1})\right)^{(2)}\right| \leqq \Omega^* d_{12}^{\lambda}, \quad \left(\Omega^* \leqq \frac{1}{2}\Omega_0\right.$$

. . . . . .

gesetzt wird, für die analogen Ausdrücke mit x_n, y_n, z_n; $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$; .. an Stelle von $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ Schranken von der Form

$$\alpha_*(t - t_0)\,\Omega^*, \qquad \alpha_*^2 (t - t_0)^2\, \Omega^*, \ldots,$$

wo die Größe α_* nur von dem Bereiche $T_0 + S_0$, von den Funktione

[25]) Die Ungleichheiten (53*) ergeben sich, wenn man beachtet, daß

$$\left(\frac{\partial}{\partial a^2}(\bar{x} - a)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\bar{x} - a)\right)^{(2)} = (t - t_0)\left\{\left(\widetilde{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial a^2}}\right)^{(1)} - \left(\widetilde{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial a^2}}\right)^{(2)}\right\}$$

ist, unter $\left(\widetilde{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial a^2}}\right)^{(1)}$ den Wert der fraglichen Ableitung für einen gewissen Wert der Ze in dem Intervall $\langle t_0, t \rangle$ verstanden. Die in geschweiften Klammern enthaltene Diff renz ist dem absoluten Betrage nach $\leqq \alpha\, d_{12}^{\lambda}$, da sowohl $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}, \ldots,$ als auch $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial a^2}, \ldots$ einer H-Bedingung für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ gleichmäßig genügen.

η_0, ζ_0 und von Ω_0 abhängt[26]). Hierdurch ist augenscheinlich gezeigt, daß $\bar{y}, \bar{z}$ für $t - t_0 \leqq \frac{1}{\alpha_*} q t_*$ $(q < 1)$, mithin für alle $t < t_0 + \frac{1}{\alpha_*} t_*$ mit x, y, z sammenfallen. Sei $\overline{m}$ die größte in α_* enthaltene ganze Zahl. Durch $+1$-malige Wiederholung der vorhergehenden Überlegung überzeugt an sich, daß die Funktionen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ für alle t in $\langle t_0, t_0 + t_* \rangle$ mit x, y, z entisch sind.

Wie man sogleich sehen wird, können $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ überhaupt für keinen ert von t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ von x, y, z verschieden sein. Dies könnte ch dem vorstehenden höchstens für diejenigen Werte von t in diesem tervalle eintreten, für die die Ungleichheiten (53), (53*) nicht erfüllt nd. Es sei t^0 die untere Grenze aller so beschaffenen t. Für alle $t < t^0$ nd also die Beziehungen (53), (53*) erfüllt, folglich ist $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $= z$. Aus Gründen der Stetigkeit ist auch für $t = t^0$ noch immer $= x$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z$.

Führt man die eingangs durchgeführten Überlegungen noch einmal rch, indem man diesmal t^0 für t_0 setzt, so findet man, daß sogar in nem gewissen in t^0 beginnenden Zeitintervall $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z$ ist, arum wegen (41), entgegen der Voraussetzung, die Ungleichheiten (53), 3*) bestehen.

In einer ganz ähnlichen Weise würde sich zeigen lassen, daß *der eben bewiesene Unitätssatz unverändert gilt, auch wenn man annimmt, aß die Lösung $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ noch weitere stationäre Unstetigkeiten zweiter rdnung aufweisen könnte, d. h. wenn im Raume (a, b, c), außer S_0, auch och andere zeitlich unveränderliche Unstetigkeitsflächen zugelassen werden.* ei etwa S_0 eine solche Fläche; wir setzen der Einfachheit halber voraus, aß S_0 denselben Stetigkeits- und topologischen Charakter wie S_0 hat und anz im Innern von T_0 enthalten ist. Auf S, dem Bilde von S_0 im aume (x, y, z), kann nur die Normalableitung von u, v, w (sprungweise) nstetigkeiten haben, da ja u, v, w durchweg stetig sind. Also sind öchstens die Tangentialkomponenten von ξ, η, ζ unstetig. Aus (8*), 10*) und (11) folgen damit immer noch die Formeln (12). Der Unitätseweis verläuft wie vorhin, nur wird man z. B. in § 4 für die Integrale $\int$ in naheliegender Schreibweise $\int_{\bar{T}} + \int_{\bar{T}-\bar{T}}$ setzen und im übrigen wie vorhin erfahren.

Anderseits läßt sich durch Betrachtungen wie auf S. 97 zeigen, daß uch jetzt noch die Euler-Lagrangeschen hydrodynamischen Gleichungen

[26]) Daß die Ungleichheiten (55), sofern t_* hinreichend klein ist, für $n = 1$ mit $_0 = a, \ldots$ gelten, folgt wieder aus Gründen der Stetigkeit. Der Einfachheit halber ei $\alpha_* > 1$ angenommen.

zu den Formeln (10*) und (11) führen, wie auch umgekehrt aus diesen jene Gleichungen gewonnen werden können. Wesentlich ist dabei die Tatsache, daß es sich lediglich um stationäre Unstetigkeiten handelt. Damit ist aber, wie bereits in § 1 hervorgehoben wurde, der Unitätssatz der Lösung hydrodynamischer Gleichungen unter den im § 1 gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen im vollen Umfange bewiesen, da andere als stationäre Unstetigkeiten in ideellen inkompressiblen Flüssigkeiten nicht vorkommen können.

Unter den mehrfach genannten Voraussetzungen sind die vorkommenden Unstetigkeiten durch die Anfangsbedingungen vollkommen bestimmt. Die Verhältnisse liegen hier anders wie bei kompressiblen Flüssigkeiten, insbesondere Gasen, wo, wie man weiß, in der Regel nicht stationäre Wellen auftreten.

§ 5.

Erweiterungen.

Die bisherigen Resultate lassen sich in verschiedenen Richtungen weiterführen. Es ist einleuchtend, daß alle Überlegungen ihre Gültigkeit behalten, wenn die Wirbellinien zur Zeit t_0 (und darum auch für alle hinreichend kleinen $t - t_0$) nicht eine, sondern mehrere wie $T_0 + S_0$ bis schaffene Wirbelröhren bilden.

Des weiteren gelten unsere Betrachtungen sinngemäß auch in dem Falle, wenn *die Flüssigkeit sich nicht allseitig ins Unendliche erstreckt, vielmehr ein geschlossenes, in vorgeschriebener Weise bewegtes Gefäß vollkommen erfüllt, sofern die Wirbelröhren zur Zeit t_0 sich im Innern der Flüssigkeitsmasse schließen.*

Die Aufgabe ist jetzt also diese. Es handelt sich um eine ganz im Endlichen befindliche, zusammenhängende Masse homogener, inkompressibler Flüssigkeit, die in ein Gefäß eingeschlossen ist, das sich in vorgeschriebener Weise bewegt und das wir der Einfachheit halber als einfach zusammenhängend annehmen. Ist (x, y, z) ein Punkt auf der Innenseite der Gefäßwand, Σ, so gilt für alle t in einem Intervall $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ eine Gleichung

$$\Psi(x, y, z, t) = 0, \tag{56}$$

unter Ψ eine gegebene, etwa analytische und reguläre Funktion ihrer vier Argumente für alle t in $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ und alle x, y, z in einem dreidimensionalen Bereiche, der die Innenseite der Gefäßwand zur Zeit t_0, Σ_0, ganz in seinem Innern enthält, verstanden. Wir nehmen an, daß

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 > 0 \tag{57}$$

Ist das Gefäß starr, so hängt Ψ in bekannter Weise von sechs ametern ab, die vorgegebene Funktionen der Zeit sind. Ruht das äß, so ist Ψ von t unabhängig. Aus (56) folgt, wie man weiß, für (x, y, z) auf Σ die Beziehung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} u + \frac{\partial \Psi}{\partial y} v + \frac{\partial \Psi}{\partial z} w = 0,$$

r, wenn mit u_n die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung Innennormale bezeichnet wird,

$$u_n = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$ [27])

Da das Gefäß von einer inkompressiblen Flüssigkeit voll erfüllt ist, muß

$$\int_{\Sigma} u_n \, d\sigma = 0, \quad \text{demnach} \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma = 0$$

n.

Es wird jetzt angenommen, daß zur Zeit t_0 das Geschwindigkeitsfeld, s sich diesmal nur über das von Σ_0 begrenzte endliche Gebiet Θ_0 er- eckt, der Bedingung (58) gemäß vorgegeben ist. Die Komponenten r Geschwindigkeit, u_0, v_0, w_0, sind in $\Theta_0 + \Sigma_0$ stetig und haben dort tige, oder höchstens auf einer wie in § 1 beschaffenen Fläche S_0 sprung- ise unstetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Sowohl dem Bereiche $T_0 + S_0$ als auch in dem in bezug auf Θ_0 komplemen- en Bereiche erfüllen $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}$ eine H-Bedingung. Auf Σ_0 ist

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} w_0 = 0, \qquad \Psi_0 = \Psi(x, y, z, t_0).$$

e Wirbelkomponenten zur Zeit t_0: ξ_0, η_0, ζ_0, verhalten sich genau so wie e in § 1 ebenso bezeichneten Größen. Die auf die Flüssigkeit wirkenden äfte haben natürlich eine Kräftefunktion, U.

Wir behaupten, daß durch die vorstehenden Anfangs- und Grenzbe- ngungen auch jetzt noch die Bewegung in einem gewissen Zeitintervalle $, t_0 + \tilde{t}\rangle$ vollkommen gegeben ist. Was den Druck betrifft, so ist er r bis auf eine willkürliche additive Funktion der Zeit bestimmt.

Die Integro-Differentialgleichungen (11) und (17) sind im vorliegen- n Falle durch die folgenden Gleichungen zu ersetzen:

---

[27]) Es wird dabei vorausgesetzt, daß beim Übergang von Σ in das Innere der üssigkeitsmasse, Θ, längs einer Normale zu Σ die Funktion Ψ allemal positive erte erhält. Diese Annahme bildet natürlich keine Einschränkung der Allgemeinheit.

$$x = a + \int_{t_0}^{t} u\,dt, \qquad y = b + \int_{t_0}^{t} v\,dt, \qquad z = c + \int_{t_0}^{t} w\,dt,$$

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \overset{+}{u} + \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

(61) . . . . . .

$$w = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \overset{+}{w} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0,$$

(62) . . . . . .

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0.$$

In (61) bezeichnet φ eine in $\Theta + \Sigma$ nebst ihrer Normalableitung stetige, in Θ reguläre Potentialfunktion, die auf Σ der Bedingung

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\overset{+}{u} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\overset{+}{v} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\overset{+}{w} = 0, \tag{63}$$

oder, anders geschrieben,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\overset{+}{u}_n - \frac{\partial\Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{64}$$

genügt.

In der Tat ist zunächst wegen (64) gewiß die Randbedingung (58*) erfüllt. Aus (61) und (62) folgen ferner in naheliegender Weise die Beziehungen (13) usw. des § 1.

Die Bestimmung der Funktion φ ist stets möglich, da

$$-\int_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = \int_\Sigma \frac{\partial\Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma + \int_\Sigma \overset{+}{u}_n\,d\sigma = 0 \tag{65}$$

ist. Der erste Summand ist tatsächlich nach (59) gleich Null. Andererseits ist wegen

$$\frac{\partial\overset{+}{u}}{\partial x} + \frac{\partial\overset{+}{v}}{\partial y} + \frac{\partial\overset{+}{w}}{\partial z} = 0 \tag{66}$$

auch

$$\int_\Sigma \overset{+}{u}_n\,d\sigma = 0. \tag{67}$$

Die Funktion φ ist übrigens nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Die Auflösung der Gleichungen (61), (62) kann durch sukzessive Approximationen ganz wie in §§ 2, 3, 4 erfolgen. Als die erste Näherung setzen wir für alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$

$$x_1 = a + \int_{t_0}^{t} dt \left[\left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial c} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \eta_0' \, d\tau_0' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial b} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \zeta_0' \, d\tau_0' \right\} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial a} \right],$$

8) . . . . . .

$$z_1 = c + \int_{t_0}^{t} dt \left[\left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial b} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \xi_0' \, d\tau_0' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_{T_0} \frac{1}{r_0} \eta_0' \, d\tau_0' \right\} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial c} \right].$$

ier bezeichnet $\varphi_0(x, y, z)$ diejenige in $\Theta_0 + \Sigma_0$ nebst ihrer Normal-bleitung stetige, in Θ_0 reguläre Potentialfunktion, die auf Σ_0 die Be-ngung

9) $$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \dot{u}_{n0}$$

füllt. Dabei ist $\dot{u}_{n0}$ die Normalkomponente desjenigen Vektors, dessen omponenten in der Richtung der Koordinatenachsen den in geschweiften lammern in (68) enthaltenen Ausdrücken gleich sind.

Als die zweite Annäherung setzen wir, wieder nur für die Punkte in $_0 + S_0$,

$$x_2 = a + \int_{t_0}^{t} dt \left[\left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \eta_1' \, d\tau_1' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \zeta_1' \, d\tau_1' \right\} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right],$$

70) . . . . . .

$$z_2 = c + \int_{t_0}^{t} dt \left[\left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \xi_1' \, d\tau_1' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{T_1} \frac{1}{r_1} \eta_1' \, d\tau_1' \right\} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \right],$$

$$\xi_1 = \frac{\partial x_1}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial x_1}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial x_1}{\partial c} \zeta_0,$$

71) . . . . . .

$$\zeta_1 = \frac{\partial z_1}{\partial a} \xi_0 + \frac{\partial z_1}{\partial b} \eta_0 + \frac{\partial z_1}{\partial c} \zeta_0.$$

Es ist jetzt, in naheliegender Schreibweise:

$$\Delta \varphi_1 = 0 \quad \text{in} \quad \Theta_1 + \Sigma_1,$$

72) $$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \dot{u}_{n1}.$$

In analoger Weise werden x_3, y_3, z_3 usw. gebildet. Wie in §§ 2, 3, 4 äßt sich zeigen, daß die Folgen x_n, y_n, z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ nebst ihren . a. O. präzisierten partiellen Ableitungen für alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$ nd alle hinreichend kleinen $t - t_0$ gleichmäßig konvergieren. Die jetzt n (68), (70) usw. neu hinzugekommenen Glieder geben zu keinerlei chwierigkeiten Anlaß.

Nachdem so die Bahnen der $T_0 + S_0$ füllenden Flüssigkeitsteilchen bestimmt worden sind, liefern die Gleichungen (61) das Geschwindigkeitsfeld für alle (x, y, z) in $\Theta + \Sigma$. Geht man jetzt in bekannter Weise von den Eulerschen zu den Lagrangeschen Variablen über, so erhält man die Bahnen der außerhalb $T_0 + S_0$ gelegenen Flüssigkeitsteilchen.

Was schließlich den Druck betrifft, so ist hierüber folgendes zu bemerken. Wie in § 1 läßt sich zeigen, daß ein bis auf eine additive Funktion der Zeit bestimmtes Beschleunigungspotential Q existiert. Es gilt ferner, unter $p^*(t)$ eine willkürliche Funktion verstehend,

$$p = p^*(t) + \varrho(U - Q). \tag{73}$$

Der Druck ist also nur bis auf eine additive Funktion der Zeit bestimmt.

In einer ganz ähnlichen Weise läßt sich die mit der vorstehenden nahe verwandte Aufgabe behandeln, *die Bewegung einer allseitig unendlich ausgedehnten Masse homogener, inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeit zu bestimmen, in der ein starrer oder in vorgegebener Weise unter Aufrechterhaltung seines Volumens sich deformierender Körper $\mathfrak{T}$ zwangläufig bewegt wird.* Es wird angenommen, daß die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte von einem Potential herrühren, daß zur Zeit t_0 in der Flüssigkeit eine oder mehrere geschlossene Wirbelröhren existieren, während außerhalb dieser das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei ist. Im Unendlichen verschwinden u, v, w für alle in Betracht kommenden Zeiten wie $O(R^{-2})$.

Die Grundgleichungen des Problems sind auch jetzt die Gleichungen (61) und (62), nur bezeichnet diesmal φ diejenige bis auf eine additive Konstante bestimmte, im Außengebiete von $\mathfrak{T}$ reguläre Potentialfunktion, die auf dem Rande $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{T}$ der Gleichung (64) genügt[28]), während im Unendlichen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sich wie $O(R^{-2})$ verhalten. Wir bemerken, daß auch jetzt noch

$$\int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -\int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma - \int_{\mathfrak{S}} \overset{+}{u}_n d\sigma = 0 \tag{73*}$$

gilt. In der Tat ist der erste Summand, da das Volumen von $\mathfrak{T}$ sich nicht ändert, gleich Null. Aber auch $\int_{\mathfrak{S}} \overset{+}{u}_n d\sigma = 0$, da die Funktionen $\overset{+}{u}, \overset{+}{v}, \overset{+}{w}$, die man sich ohne weiteres in $\mathfrak{T}$ den Formeln (61) gemäß erklärt denken kann, dort die Gleichung (66) erfüllen. Nach bekannten Sätzen

---

[28]) Wir nehmen an, daß $\mathfrak{S}$ dieselben Stetigkeitseigenschaften wie S hat. Das Symbol $\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichnet die Ableitung in der in das Innere von $\mathfrak{T}$ weisenden Richtung. Da wir $\mathfrak{T}$ als einfach zusammenhängend angenommen haben, so ist φ gewiß einwertig.

gt aus (73*), daß φ auch im Unendlichen regulär ist, d. h. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\varphi}{\partial z}$ wie $O(R^{-3})$ verhalten[29]).

Es liegt jetzt nahe, noch einen Schritt weiter zu gehen und annehmen, *daß sich in der Flüssigkeit ein starrer Körper* $\mathfrak{T}$, *oder allgemeiner ein System von m starren Körpern*, $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_m$, *befindet, die nicht, wie vorhin, in vorgeschriebener Weise bewegt werden, sondern sich frei bewegen können.* Der Einfachheit halber möge es sich um eine kräftefreie Bewegung handeln. Ist das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t_0 wirbelfrei, so bietet das Existenz- und Unitätsproblem keine Schwierigkeiten dar. Handelt es sich insbesondere um einen einzigen eingetauchten Körper und ist dieser von einer Rotationsfläche begrenzt, so lassen sich nach Kirchhoff die Bewegungsgleichungen durch elliptische Funktionen integrieren[30]). *Wir nehmen demgegenüber an, daß das Geschwindigkeitsfeld* v_0, w_0 *eine geschlossene Wirbelröhre* T_0 *enthält.* Es ist zu erwarten, daß auch jetzt der Existenzbeweis der Lösung durch eine passende Ausgestaltung der vorhin gebrauchten Methode der sukzessiven Approximationen erbracht werden kann. Den Bewegungsgleichungen (61) und (62) der Flüssigkeit sind im vorliegenden Falle die bekannten $6m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung der Körper $\mathfrak{T}$, bezogen auf ein im Raume festes Achsenkreuz x, y, z, hinzuzufügen. Als die einzigen wirkenden Kräfte erscheinen die Resultierende und das resultierende Moment der von der Flüssigkeit auf jeden der m Körper ausgeübten Drucke.

§ 5.

Ein Existenzsatz bei Abwesenheit des Kräftepotentials.

In den vorhergehenden Paragraphen sind wir, von den Cauchyschen Formeln (11) ausgehend, zu einem Existenzbeweis der Lösungen hydrodynamischer Gleichungen (1) und (2), unter den seinerzeit zusammengestellten Bedingungen, gelangt. Der Übergang von den Lagrangeschen hydrodynamischen Gleichungen zu den Cauchyschen Beziehungen (11) bedeutet, worauf schon einmal hingewiesen worden ist, die Elimination des Druckes. Es liegt nun nahe, sich dieses Hilfsmittels zu bedienen, auch wenn die auf die Flüssigkeitsteilchen wirkenden Volumkräfte kein Potential haben. In diesem Falle gilt die Helmholtzsche Theorie nicht mehr. Wir betrachten wie vorhin eine inkompressible Flüssigkeit, wobei also, im Gegensatz zu den Annahmen des § 1, die Einheitskräfte X, Y, Z kein Potential

[29]) Man vgl. hierzu etwa meinen Encyklopädieartikel II C 3, S. 197–199 sowie 212–213.

[30]) Vgl. S. Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1876, S. 233–250.

mehr haben. Im übrigen legen wir unserer Untersuchung, wie in § 1, eine allseitig unbegrenzte Flüssigkeitsmasse zugrunde und nehmen an, daß X, Y, Z, die auch von der Zeit abhängen können, sich im Unendlichen wie $O(R^{-2})$ verhalten. Durch Elimination des Druckes gelangt man hier zu Formeln, die den Cauchyschen Relationen (11) analog sind [31]).

Aus den Bewegungsgleichungen

$$u' = \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v' = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad w' = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{74}$$

folgen mit

$$\begin{gathered} X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} = A, \qquad X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} + Z\frac{\partial z}{\partial b} = B, \\ X\frac{\partial x}{\partial c} + Y\frac{\partial y}{\partial c} + Z\frac{\partial z}{\partial c} = C \end{gathered} \tag{75}$$

die weiteren Beziehungen

$$\begin{gathered} u'\frac{\partial x}{\partial a} + v'\frac{\partial y}{\partial a} + w'\frac{\partial z}{\partial a} - A = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u'\frac{\partial x}{\partial c} + v'\frac{\partial y}{\partial c} + w'\frac{\partial z}{\partial c} - C = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c}. \end{gathered} \tag{76}$$

Aus diesen folgt, daß

$$u'dx + v'dy + w'dz - (A\,da + B\,db + C\,dc) \tag{77}$$

ein totales Differential ist. Die gleiche Eigenschaft hat der Ausdruck

$$\begin{gathered} da\int_{t_0}^{t}\left(u'\frac{\partial x}{\partial a} + v'\frac{\partial y}{\partial a} + w'\frac{\partial z}{\partial a}\right)dt + \ldots + dc\int_{t_0}^{t}\left(u'\frac{\partial x}{\partial c} + v'\frac{\partial y}{\partial c} + w'\frac{\partial z}{\partial c}\right)dt \\ -(A_1\,da + B_1\,db + C_1\,dc), \end{gathered} \tag{78}$$

$$A_1 = \int_{t_0}^{t} A\,dt, \qquad B_1 = \int_{t_0}^{t} B\,dt, \qquad C_1 = \int_{t_0}^{t} C\,dt.$$

Es gilt nun beispielsweise

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} u'\frac{\partial x}{\partial a}dt &= \int_{t_0}^{t}\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}dt = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{d}{dt}\left(u\frac{\partial x}{\partial a}\right) - u\frac{\partial u}{\partial a}\right\}dt \\ &= u\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial a}(u^2)dt. \end{aligned} \tag{79}$$

---

[31]) Sie sind von Herrn A. Friedmann, a) C. R. **163** (1916), S. 219–222, b) Mitt. der Math. Ges. Charkow, 6 S. (russisch, abgeschlossen 1915), angegeben worden. Die zunächst folgenden Ausführungen des Textes bilden eine Modifikation der Darstellung von P. Appell, Traité de Mécanique rationnelle Bd. III (1921), S. 596—599. Herr Friedmann betrachtet übrigens den allgemeineren Fall einer kompressiblen Flüssigkeit.

r (78) kann man darum nach einer teilweisen Integration setzen

$$\text{0)} \quad \left(u\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a}\right)da + \left(u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} - v_0 + w\frac{\partial z}{\partial b}\right)db$$

$$+ \left(u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} - w_0\right)dc - d\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\,dt$$

$$-(A_1\,da + B_1\,db + C_1\,dc).$$

a der vorletzte Summand ein vollständiges Differential ist, so gilt für e Gesamtheit der übrigen Summanden das gleiche. Die eine der drei tegrabilitätsbedingungen ist

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial b} - \frac{\partial B_1}{\partial a}\right) = 0$$

ler mit

$$\text{1)} \qquad \frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b} = 2\zeta_0, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial a} - \frac{\partial A_1}{\partial b} = 2\zeta^*$$

ich

$$\text{2)} \quad \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} = 2\zeta_0 + 2\zeta^*.$$

Dazu kommen die beiden hierzu analogen Gleichungen

$$\text{3)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} = 2\xi_0 + 2\xi^*, \\ &\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} = 2\eta_0 + 2\eta^*. \end{aligned}$$

Aus (82), (83) erhält man, wenn man

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

. . . . . .

etzt und wie bei der Ableitung der Cauchyschen Formeln (11) vorgeht, die hierzu analogen Formeln

$$\text{4)} \quad \begin{aligned} \xi &= (\xi_0 + \xi^*)\frac{\partial x}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^*)\frac{\partial x}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^*)\frac{\partial x}{\partial c}, \\ \eta &= (\xi_0 + \xi^*)\frac{\partial y}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^*)\frac{\partial y}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^*)\frac{\partial y}{\partial c}, \\ \zeta &= (\xi_0 + \xi^*)\frac{\partial z}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^*)\frac{\partial z}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^*)\frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned}$$

Für ξ^*, η^*, ζ^* findet man nach (81), (78) und (75) die Ausdrücke

$$2\zeta^* = \frac{\partial B_1}{\partial a} - \frac{\partial A_1}{\partial b} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial B}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial b}\right) dt \tag{85}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial Z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right) dt.$$

. . . . . .

Zur Zeit t_0 ist $\xi^* = \eta^* = \zeta^* = 0$.

Haben die Einheitskräfte ein Potential, so verschwinden ξ^*, η^*, ζ^*, und wir erhalten die Cauchyschen Formeln wieder.

Bei dem Existenzbeweis der Lösung bilden nun die Formeln (84), wie in § 1 die Formeln (11), den Ausgangspunkt. Wir machen dabei die folgenden Voraussetzungen:

1. X, Y, Z sind nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen für alle in Betracht kommenden Werte der Zeit und alle x, y, z stetig. Sie verhalten sich im Unendlichen wie $O(R^{-2})$, während $\frac{\partial X}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial z}$ dort wie $O(R^{-3})$ und $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$ wie $O(R^{-4})$ verschwinden[32]). Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$ erfüllen die H-Bedingung[33]).

2. Die Geschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0 zur Zeit t_0 sind überall stetig und verschwinden im Unendlichen wie $O(R^{-2})$. Sie haben stetige oder zumindest abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Diese verschwinden für $R \to \infty$ entsprechend wie $O(R^{-3})$ und $O(R^{-4})$

Um Vorstellungen zu fixieren, sei angenommen, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial c}$ nur längs einer einzigen geschlossenen Fläche S_0 sprungweise Änderungen erleiden, während $\frac{\partial^2 u_0}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w_0}{\partial c^2}$ sowohl in $T_0 + S_0$ als auch in dem Komplementärbereiche stetig sind. Die Fläche S_0 hat dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die in § 1 ebenso bezeichnete Fläche, doch braucht sie nicht notwendig aus lauter Wirbellinien zu bestehen,

---

[32]) Für alle in Betracht kommenden t gleichmäßig.

[33]) Es gilt z. B. in naheliegender Schreibweise

$$\left|\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right| \leqq \dot{\alpha}\, \mathfrak{d}^{\lambda}, \qquad \mathfrak{d}^2 = (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2.$$

Die Werte $\dot{\alpha}$ sind Ortsfunktionen, die im Unendlichen, für alle fraglichen t gleichmäßig, wie $O(R^{-5})$ verschwinden.

ch braucht das Geschwindigkeitsfeld u_0, v_0, w_0 nicht außerhalb von T_0 rbelfrei zu sein. Doch wird auch diesmal vorausgesetzt, daß die par- llen Ableitungen zweiter Ordnung von u_0, v_0, w_0 sowohl in $T_0 + S_0$, als ch in dem Komplementärbereiche der H-Bedingung genügen[34]). Die mponenten der Geschwindigkeit zur Zeit t: u, v, w, zeigen ein ganz aloges Verhalten. Auch die Funktionen $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$ $a, b, c, t)$ verhalten sich ähnlich.

Aus bekannten kinematischen Kompatibilitätsbedingungen folgt, daß f S_0, wie auch auf den Unstetigkeitsflächen S zur Zeit t, sich nur die rmalableitung der Geschwindigkeit sprungweise ändern kann. Dement- rechend geht die Normalableitung des Wirbelvektors durch S_0 bzw. S etig durch. Beachtet man dies, so findet man, mit Rücksicht auf das rhalten der Funktionen ξ_0, η_0, ζ_0; ξ^*, η^*, ζ^*; $\frac{\partial x}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}$ im Unendlichen r u, v, w die zu (12) und (17) völlig analogen Formeln

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau',$$

$$v = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau', \tag{6}$$

$$w = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'$$

nd

$$x = a + \int_{t_0}^{t} dt\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'\right\}, \tag{7}$$

. . . . . .

ie Volumintegrationen sind über den ganzen Raum erstreckt zu denken.

Der Existenzbeweis der Lösungen des Systems (87), (84) wird durch kzessive Approximationen den Betrachtungen der §§ 1, 2, 3 parallel eführt. Wir setzen

$$x_1 = a + \int_{t_0}^{t} dt\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial c}\int\frac{1}{r_0}\eta_0'\,d\tau_0' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{1}{r_0}\zeta_0'\,d\tau_0'\right\}, \tag{8}$$

. . . . . .

---

[34]) Das Verhalten im Unendlichen ist hier das gleiche wie bei $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ usw. (s. die orhergehende Fußnote).

allgemein für $n \geqq 1$

$$x_{n+1} = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_n} \int \frac{1}{r_n} \eta_n' d\tau_n' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_n} \int \frac{1}{r_n} \zeta_n' d\tau_n' \right\},$$

. . . . . .

$$\xi_n = (\xi_0 + \xi_n^*) \frac{\partial x_n}{\partial a} + (\eta_0 + \eta_n^*) \frac{\partial x_n}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta_n^*) \frac{\partial x_n}{\partial c},$$

(89) . . . . . .

$$\xi_n^* = \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{\partial X_n}{\partial c} \frac{\partial x_n}{\partial b} + \frac{\partial X_n}{\partial b} \frac{\partial x_n}{\partial c} - \frac{\partial Y_n}{\partial c} \frac{\partial y_n}{\partial b} + \frac{\partial Y_n}{\partial b} \frac{\partial y_n}{\partial c} - \frac{\partial Z_n}{\partial c} \frac{\partial z_n}{\partial b} + \frac{\partial Z_n}{\partial b} \frac{\partial z_n}{\partial c} \right) d$$

. . . . . .

$$X_n = X(x_n, y_n, z_n, t), \ldots .$$

Man überzeugt sich leicht, daß der Bildung der einzelnen Näherungen nichts im Wege steht, da ξ_n^*, η_n^*, ζ_n^* sich, was ihre Stetigkeitseigenschaften betrifft, genau so wie ξ_0, η_0, ζ_0 verhalten.

Sei S_n das Bild, das von der Fläche S_0 zur Zeit $t \geqq t_0$ in dem Raume der Variablen x_n, y_n, z_n durch die Formeln

$$x_n = x_n(a, b, c, t), \ \ldots, \ z_n = z_n(a, b, c, t)$$

entworfen wird. Als Funktionen von x_n, y_n, z_n aufgefaßt, sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung von ξ_n, η_n, ζ_n sowohl in dem von S_n begrenzten Bereich T_n, als auch in dem Komplementärbereiche $\bar{T}_n$ stetig und erfüllen eine H-Bedingung. Sie können sich aber auf S_n sprungweise ändern.

Bei dem Konvergenzbeweis handelt es sich jetzt wieder um die Abschätzung der Differenzen

$$|x_n - x_{n-1}|, \ |y_n - y_{n-1}|, \ |z_n - z_{n-1}|; \ \left| \frac{\partial}{\partial a}(x_n - x_{n-1}) \right|, \ \ldots .$$

Wir setzen

$$x_{n+1} = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_n} \left(\int_{T_n} \frac{1}{r_n} \eta_n' d\tau_n' + \int_{\bar{T}_n} \frac{1}{r_n} \eta_n' d\tau_n' \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\int_{T_n} \frac{1}{r_n} \zeta_n' d\tau_n' + \int_{\bar{T}_n} \frac{1}{r_n} \zeta_n' \right.$$

. . . . . .

und analog

$$x_n = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \left(\int_{T_{n-1}} \frac{1}{r_{n-1}} \eta_{n-1}' d\tau_{n-1}' + \int_{\bar{T}_{n-1}} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} \left(\int_{T_{n-1}} \frac{1}{r_{n-1}} \zeta_{n-1}' d\tau_{n-1}' \right.$$

. . . . . .

Die Betrachtungen verlaufen ganz analog wie in §§ 2, 3, doch hat n diesmal außer der Differenzen

$$\frac{\partial}{\partial z_n}\int_{T_n}\frac{1}{r_n}\eta_n' d\tau_n' - \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\int_{T_{n-1}}\frac{1}{r_{n-1}}\eta_{n-1}' d\tau_{n-1}', \quad \ldots$$

ch noch die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial z_n}\int_{\bar{T}_n}\frac{1}{r_n}\eta_n' d\tau_n' - \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\int_{\bar{T}_{n-1}}\frac{1}{r_{n-1}}\eta_{n-1}' d\tau_{n-1}', \quad \ldots,$$

sich ganz wie jene verhalten, abzuschätzen.

Zweites Kapitel.

Parallele Wirbelzylinder in einer unbegrenzten Flüssigkeit.

§ 1.

Problemstellung und Existenzbeweis.

Betrachten wir eine unbegrenzte, in einer ebenen Bewegung begriffene üssigkeitsmasse, die als inkompressibel, homogen und reibungslos vorsgesetzt wird. Wir nehmen an, daß die Geschwindigkeitskomponenten erall im Endlichen stetig sind und stetige oder doch höchstens auf geschlossenen Kurven sprungweise unstetige partielle Ableitungen erster Ordng haben. Über ihr Verhalten im Unendlichen werden weiter unten here Festsetzungen gemacht. Der Einfachheit halber wird angenommen, ß die Bewegung ohne Kräftewirkung erfolgt und der Druck im Unendhen konstant ist. Es möge weiter in einem bestimmten Augenblick e Bewegung überall, außer im Innern von zwei zueinander parallelen, f der Ebene der Bewegung senkrechten Zylindern, deren Querschnitte und T_2 heißen mögen, wirbellos sein. Im Innern der beiden Zylinder ll demgegenüber die Wirbelstärke von Null verschieden und zwar überall eich groß sein. Natürlich steht der Vektor der Rotation der Geschwingkeit auf der Ebene der Bewegung senkrecht. Wir nehmen an, daß T_1 d T_2 einfach zusammenhängend sind und daß T_2 aus T_1 durch eine rehung durch den Winkel von 180^0 um den gemeinsamen Schwerpunkt r beiden Querschnitte hervorgeht. Nach Helmholtz bleibt der Begungszustand des Systems, bezogen auf ein geeignetes rotierendes Achsenreuz, unverändert erhalten, wenn der Querschnitt von T_1 und T_2 als endlich klein vorausgesetzt wird[35]). Dieser Satz besagt eigentlich folgen-

[35]) Unter geeigneten Voraussetzungen bezüglich des Verhaltens im Unendlichen, f die freilich a. a. O. nicht näher eingegangen wird.

des: Ist der Querschnitt von T_1, und also auch von T_2, beliebig, so wird sich der Bewegungszustand der Flüssigkeit wohl mit der Zeit ändern, doch wird diese Änderung, von einem in geeigneter Weise bewegten Achsenkreuz aus beurteilt, um so kleiner ausfallen, je kleiner die Abmessungen von T_1 und T_2 sind.

Man kann nun im vorliegenden Falle zu einem völlig strengen Resultat kommen, *wenn man die Form der Wirbelröhren T_1 und T_2 nicht als von vornherein gegeben auffaßt, sondern sie so zu bestimmen sucht, daß der Bewegungszustand, immer wieder auf geeignete rotierende Achsen bezogen, zeitlich unverändert bleibt.* Wir wollen das Problem wie folgt näher präzisieren. Die Querschnitte der Wirbelröhren T_1 und T_2 sind einfach zusammenhängende, von je einer stetig gekrümmten Kurve S_1 bzw. S_2, die sich wenig von einer Kreislinie unterscheiden, begrenzte ebene Bereiche (Fig. 1)[36]. Wie vorhin erwähnt, geht T_2 aus T_1 durch eine Drehung durch den Winkel von 180° um den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Querschnitte hervor. Sei M_1 der Schwerpunkt von T_1, M_2 derjenige von T_2. Die beiden Bereiche haben die Verbindungsgerade $M_1 M_2$ zu einer Symmetrielinie. Sei D der Durchmesser von S_1[37], L der Abstand $M_1 M_2$, J die als räumlich konstant vorausgesetzte Wirbelstärke in T_1 und T_2. Wir beziehen die Lage der Flüssigkeit auf ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine z-Achse rotierendes kartesisches Achsenkreuz x, y, z und legen die z-Achse durch den gemeinsamen Schwerpunkt von T_1 und T_2 parallel zu den Wirbelfäden.

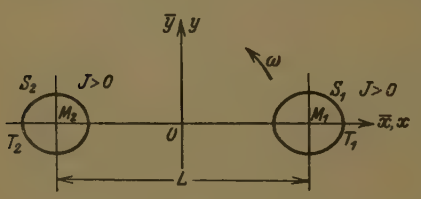


Fig. 1.

Wir behaupten, daß für alle hinreichend kleinen Werte von $\frac{D}{L}$ sich die Form der Kurven S_1 und S_2 und die Winkelgeschwindigkeit ω so bestimmen lassen, daß der Bewegungszustand, von dem rotierenden Achsenkreuz aus beurteilt, permanent wird. Die einzelnen Flüssigkeitsteilchen beschreiben relativ zu dem rotierenden Achsenkreuz ganz bestimmte geschlossene Bahnen. Insbesondere sind die Kurven S_1 und S_2 relative Bahnen der auf S_1 und S_2 gelegenen Teilchen. Die Wirbelröhren T_1 und T_2 bleiben, als Ganzes betrachtet, in bezug auf die x-y-Achsen in Ruhe, rotieren also, von einer festen Ebene aus betrachtet, mit der Win

[36]) Wir nehmen darüber hinaus an, daß der Krümmungsradius von S_1 bzw. S_2 als Funktion der Bogenlänge der H-Bedingung genügt. Die im vorstehenden zusammengestellten Voraussetzungen entsprechen genau den im ersten Kapitel der Fläche auferlegten Bedingungen.

[37]) D. h. der Höchstwert der Entfernung zweier Punkte von S_1 voneinander.

geschwindigkeit ω um die z-Achse. Sei $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ irgendein festes kar-
sches Achsenkreuz, dessen Ursprung mit demjenigen unseres rotieren-
Achsenkreuzes und dessen $\bar{z}$-Achse mit der z-Achse jenes Systems
ammenfällt. Der Einfachheit halber betrachten wir den Bewegungs-
tand der Flüssigkeit in einem Augenblicke, in dem die beiden Achsen-
uze vollends zusammenfallen, und zwar wollen wir unsere Überlegungen
ächst auf die festen Achsen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ beziehen. Die einzelnen Größen,
Geschwindigkeitskomponenten usw., wollen wir dementsprechend mit
em horizontalen Strich oben kennzeichnen.

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

gt die Existenz einer bis auf eine additive Konstante bestimmten, in
ganzen Ebene stetigen, eindeutigen Funktion

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{(0,0)}^{(\bar{x}, \bar{y})} (\bar{v}\, d\bar{x} - \bar{u}\, d\bar{y}).$$

e Kurvenschar $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = e$. Konst. stellt das System der Stromlinien
r. In der Tat ist zunächst die Differentialgleichung der Stromlinien

$$d\bar{x} : d\bar{y} = \bar{u} : \bar{v}.$$

s (2) und (3) folgt weiter

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \qquad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = -\bar{u},$$

thin für eine Stromlinie

$$d\bar{\psi} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = \bar{v}\, d\bar{x} - \bar{u}\, d\bar{y} = 0.$$

e Gleichung $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = e$. Konst. ist also wirklich ein Integral der
fferentialgleichung (3). Es gilt nun weiter in T_1 und T_2

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = 2J,$$

mnach

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = 2J.$$

ßerhalb von T_1 und T_2 ist

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = 0.$$

mmt man an, daß im Unendlichen die Flüssigkeit ruht, genauer, daß
und $\bar{v}$ für $\bar{R} \to \infty$ wie $O(\bar{R}^{-1})$ $(\bar{R}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2)$ verschwinden, so findet

man aus (7) und (8), bis auf eine willkürliche, für das weitere belanglose additive Konstante,

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{J}{\pi}\int_{T_1+T_2} \log\frac{\bar{r}_*}{\bar{r}}\, d\bar{x}_0\, d\bar{y}_0 \qquad (\bar{r}_* \text{ konstant}), \tag{9}$$

$$\bar{r}^2 = (\bar{x}-\bar{x}_0)^2 + (\bar{y}-\bar{y}_0)^2.$$

Wir nehmen, um Vorstellungen zu fixieren, $J>0$ an. Wie sich leicht zeigen läßt, muß dann auch $\omega > 0$ angenommen werden.

Die Relativgeschwindigkeit desjenigen Teilchens, das sich im betrachteten Augenblick im Punkte (x, y) befindet ($x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$), ist offenbar

$$u = \bar{u} + \omega\bar{y} = \bar{u} + \omega y, \qquad v = \bar{v} - \omega\bar{x} = \bar{v} - \omega x. \tag{10}$$

Wegen (1) ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{11}$$

also ist

$$\psi(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (v\,dx - u\,dy) \tag{12}$$

eine bis auf eine additive Konstante in der ganzen x-y-Ebene bestimmte stetige, eindeutige Funktion. Man sieht leicht ein, daß die Kurvenschar $\psi = e.$ Konst. die relativen Stromlinien, d. h. Kurven, deren Tangenten allemal die Richtung der relativen Geschwindigkeit haben, darstellt. In der Tat ist die Gleichung dieser Kurven

$$dx : dy = u : v, \tag{13}$$

mithin zugleich

$$d\psi = v\,dx - u\,dy = 0. \tag{14}$$

Es ist nun weiter wegen (12) und (10)

$$\psi = \bar{\psi} - \omega\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x\,dx + y\,dy) = \bar{\psi} - \frac{\omega}{2}R^2 \qquad (R^2 = x^2+y^2), \tag{15}$$

darum

$$\psi = -\frac{J}{\pi}\int_{T_1+T_2} \log\frac{r_*}{r}\, dx_0\, dy_0 - \frac{\omega}{2}R^2 \qquad (r_* \text{ konstant}), \tag{16}$$

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2.$$

Bei einer jeden in der Ebene x-y permanenten Bewegung sind die Bahnlinien der Flüssigkeitsteilchen zugleich Stromlinien. Wird, wie im vorliegenden Falle, verlangt, daß der Bewegungszustand der Flüssigkeit, von den rotierenden Achsen aus beurteilt, zeitlich erhalten bleibt, so müssen die Randkurven S_1 und S_2, die nach den allgemeinen Sätzen der Helmholtzschen Theorie stets aus denselben Flüssigkeitsteilchen bestehen, Bahnkurven, also auch Stromlinien sein.

Diese notwendige Bedingung ist zugleich hinreichend. Es mögen in Tat T_1 und T_2 der vorstehenden Bedingung gemäß beschaffen sein. ch die Stromfunktion $\psi(x, y)$ ist ein ganz bestimmtes Geschwindig- sfeld in der Ebene x-y gegeben. Betrachten wir diejenige in bezug das Achsenkreuz x-y *permanente* Flüssigkeitsbewegung, die das vor- ende Feld zum Geschwindigkeitsfeld hat. Die auf S_1 und S_2 befind- en Flüssigkeitsteilchen werden dauernd auf S_1 und S_2 bleiben, die in und T_2 liegenden Teilchen bleiben dauernd in T_1 bzw. T_2. Auf den im $\bar{x}$-$\bar{y}$ bezogen, hat die Wirbelstärke in T_1 und T_2 dauernd den t J, außerhalb von T_1 und T_2 den Wert Null. Die fragliche Be- ung erfüllt alle Forderungen des Problems.

Die Form der Randkurven S_1 und S_2 ist demnach so zu bestimmen,

$$\frac{J}{\pi}\int_{T_1+T_2}\log\frac{r_*}{r}\,dx_0\,dy_0+\frac{\omega}{2}R^2$$

S_1 und S_2 einen konstanten Wert erhält[38]).

Auf eine ganz analoge Beziehung führt das folgende Problem in der orie der *Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten.* ken wir uns die beiden unbegrenzten Zylinder T_1 und T_2 mit homo- er, gravitierender Flüssigkeit der Dichte f erfüllt, und es möge das ze System um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ rotieren. l sich das System im relativen Gleichgewicht befinden, so muß auf S_1 l S_2 das Gesamtpotential der wirkenden Kräfte einen konstanten Wert en. Was zunächst das Potential der Gravitationskrafte, V, betrifft, so ält man dieses, wenn man sich lediglich die Flächenstücke T_1 und T_2 t Masse belegt denkt, der Kraftwirkung indessen das logarithmische tential $2f\varkappa\log\frac{r_*}{r}$ zugrunde legt. Es ist also

$$V=2f\varkappa\int_{T_1+T_2}\log\frac{r_*}{r}\,dx_0\,dy_0.$$

Da das Potential der Zentrifugalkräfte den Wert $\frac{\tilde{\omega}^2R^2}{2}$ hat, so lautet nnach die Gleichgewichtsbedingung:

$$2f\varkappa\int_{T_1+T_2}\log\frac{r_*}{r}\,dx_0\,dy_0+\frac{\tilde{\omega}^2R^2}{2}=e.\ \text{Konst.}$$

[38]) Aus Symmetriegründen nimmt (17) auf S_1 und S_2 denselben Wert an.

auf S_1 und S_2.[39]) Diese Gleichung wird mit der vorstehend abgeleiteten Bedingung identisch, wenn man

$$\tilde{\omega}^2 = 2\pi \frac{\omega f \varkappa}{J} \tag{20}$$

setzt.

Mit den Funktionalgleichungen von der Form (19) habe ich mich in meinen Abhandlungen zur Theorie der Gestalt der Himmelskörper wiederholt beschäftigt. Insbesondere kommt in der zweiten Abhandlung dieser Reihe[40]) eine zu (19) völlig analoge Beziehung im dreidimensionalen Raume vor. Dort handelt es sich um die Bestimmung einer Gleichgewichtsfigur homogener, inkompressibler, gravitierender Flüssigkeit, die aus zwei getrennten, um eine durch den gemeinsamen Schwerpunkt hindurchgehende Achse rotierenden Massen besteht. Es wird vorausgesetzt, daß die gesuchte Gleichgewichtsfigur eine durch die Rotationsachse hindurchgehende, sowie eine auf dieser senkrecht stehende Symmetrieebene hat. Es wird weiter angenommen, daß die beiden Einzelkörper sich nur wenig von Kugeln unterscheiden. Wie an der angegebenen Stelle gezeigt wird, gibt es für alle hinreichend kleinen Werte des Quotienten: Volumen der Flüssigkeit/Abstand der Schwerpunkte der beiden Einzelkörper eine und nur eine Gleichgewichtsfigur, die den vorstehenden Bedingungen genügt und vorgegebene Volumina einschließt. Die Winkelgeschwindigkeit erhält dabei einen ganz bestimmten kleinen Wert. Das Problem wird auf die Auflösung eines Systems nichtlinearer Integro-Differentialgleichungen zurückgeführt und diese durch sukzessive Approximationen geleistet. In dem besonderen Falle, wenn die beiden Volumina gleich groß sind, tritt eine Vereinfachung ein. Jetzt gehen die beiden Körper durch eine Drehung um die Rotationsachse durch den Winkel von 180^0 ineinander über. Die Gleichungen des Problems können auf eine einzige Integro-Differentialgleichung zurückgeführt werden.

Durch die an jener Stelle durchgeführten Betrachtungen ist auch unser Problem als erledigt zu betrachten. Für alle hinreichend kleinen Werte von D/L lassen sich die Form der Kurven S_1 und S_2 und die Winkelgeschwindigkeit ω tatsächlich so bestimmen, daß der Bewegungszustand der Flüssigkeit, von dem rotierenden Achsenkreuz aus beurteilt, permanent wird. Die Kurven S_1 und S_2 sind in einer ersten Näherung

---

[39]) Auch jetzt nimmt aus Gründen der Symmetrie der Ausdruck (19) auf S_1 und S_2 denselben Wert an.

[40]) Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit, Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 201—218.

vach abgeplattete Ellipsen, deren große Achsen nach dem Koordinaten-
rung hin gerichtet sind.

Wir haben vorhin vorausgesetzt, daß die beiden Kurven S_1 und S_2 in bezug auf $M_1 M_2$ symmetrisch sind) den gemeinsamen Schwerpunkt Symmetriezentrum haben. Es hätte übrigens genügt, vorauszusetzen, die Flächeninhalte von T_1 und T_2 einander gleich sind. Hieraus aus den weiteren Annahmen, daß S_1 und S_2 sich nur wenig von isen unterscheiden und die Gerade $M_1 M_2$ zur Symmetrieachse haben, t bereits, daß S_2 aus S_1 durch eine Drehung durch den Winkel von ° um die Umdrehungsachse hervorgeht. Sind die Flächeninhalte von und T_2 voneinander verschieden, so gilt, den vorgenannten Ergebnissen ner vorhin zitierten Abhandlung gemäß, ein ähnliches Resultat. Die den Wirbelröhren T_1 und T_2 rotieren auch jetzt noch mit konstanter nkelgeschwindigkeit um eine durch den gemeinsamen Schwerpunkt T_1 T_2 hindurchgehende Achse. Die Randkurven S_1 und S_2 sind freilich ht mehr kongruent. Auch lassen sich die beiden Integro-Differential-ichungen des Problems nicht mehr auf eine einzige zurückführen. nlich liegt die Sache, wenn die Wirbelstärke zwar überall in T_1 sowie T_2 konstant, gleich $J_1 > 0$ bzw. $J_2 > 0$ ist, jedoch entgegen der ur-ünglichen Annahme $J_1 \gtrless J_2$ gilt. Bei dem analogen Problem der Theorie Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten würde diesmal die chte der Flüssigkeit in den beiden Einzelmassen verschieden sein.

§ 2.

Fortsetzung.

Helmholtz betrachtet weiter den Fall $J_1 = -J_2$ und postuliert den tz, daß die beiden Wirbelröhren unendlich kleinen Querschnittes sich smal mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung senkrecht zu ihrer ene bewegen.

In der hier vertretenen Auffassung schließt die Helmholtzsche Be-uptung die Aufgabe in sich, *den Querschnitt der beiden Wirbelröhren zu bestimmen, daß die Bewegung des Systems, bezogen auf ein geeig-es mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitendes Achsenkreuz, per-nent bleibt.* Wir nehmen an, daß die beiden Wirbelröhren in bezug f die Schwerachse des Gesamtsystems symmetrisch liegen, und daß ihre erschnitte T_1 und T_2, die sich nur wenig von Kreisflächen unterscheiden len, eine Symmetriegerade haben. Wir wählen die Ebene der Schwer-nsen, die Symmetrieebene des Systems, zur Ebene x-z und legen den ordinatenursprung in den gemeinsamen Schwerpunkt von T_1 und T_2. e Wirbelstärke in T_1 sei $J_1 = J > 0$, diejenige in T_2 dagegen $J_2 = -J < 0$.

Das Achsenkreuz x, y, z möge sich nun mit einer zunächst noch nicht bekannten Geschwindigkeit c in der Richtung der positiven y-Achse bewegen. Wir führen wie in § 1 ein festes Achsenkreuz (Fig. 2) $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ein, das in dem gerade betrachteten Augenblick mit x, y, z zusammenfällt. In dem wir die beiden Stromfunktionen wieder mit $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y})$ und $\psi(x, y)$ bezeichnen, finden wir

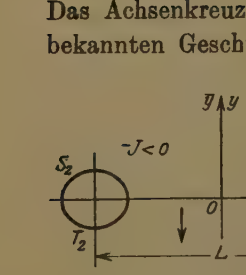


Fig. 2.

$$(21) \qquad \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{J}{\pi}\int_{T_1} \log\frac{\bar{r}_*}{\bar{r}}\, d\bar{x}_0\, d\bar{y}_0 + \frac{J}{\pi}\int_{T_2} \log\frac{\bar{r}_*}{\bar{r}}\, d\bar{x}_0\, d\bar{y}_0$$

und

$$(22) \quad \psi(x, y) = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) - cx = -\frac{J}{\pi}\int_{T_1} \log\frac{r_*}{r}\, dx_0\, dy_0 + \frac{J}{\pi}\int_{T_2} \log\frac{r_*}{r}\, dx_0\, dy_0 -$$

Auf S_1 und S_2 muß

$$(23) \qquad -\frac{J}{\pi}\int_{T_1} \log\frac{r_*}{r}\, dx_0\, dy_0 + \frac{J}{\pi}\int_{T_2} \log\frac{r_*}{r}\, dx_0\, dy_0 - cx = C$$

sein, unter C eine Ortsfunktion verstanden, die auf S_1 und S_2 je einen konstanten Wert, C_1 und C_2, annimmt. Aus Gründen der Symmetrie ist $C_2 = -C_1$.

Die Weiterbehandlung der Gleichung (23) ist von derjenigen der Gleichung (19) nicht wesentlich verschieden: auch hier kommt man auf eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung. Es hätte übrigens genügt, vorauszusetzen, daß die Flächeninhalte der beiden Querschnitte T_1 und T_2 einander gleich sind, sowie daß S_1 und S_2 eine durch die Schwerachse des Gesamtsystems hindurchgehende, auf der Fortschreitungsrichtung senkrecht stehende Symmetrieebene haben. Hieraus und aus der weiteren Annahme, daß S_1 und S_2 sich nur wenig von Kreisen unterscheiden, läßt sich bereits folgern, daß S_2 aus S_1 durch eine Drehung durch den Winkel von 180° um die Schwerachse hervorgeht. Auf das eben betrachtete Problem läßt sich, worauf schon Helmholtz hingewiesen hatte, das weitere Problem der Bewegung eines Wirbelzylinders konstanter Stärke J in einer homogenen Flüssigkeit, *die von einer unendlichen ebenen Wand parallel zur Wirbelachse begrenzt ist*, zurückführen[41]). Es genügt, die gegebene Wirbelröhre an der festen Wand zu spiegeln und das Spiegelbild mit Wirbelfäden der Stärke $-J$ zu besetzen. Durch die im vorstehenden skizzierten Betrachtungen ist das Bewegungsproblem als erledigt zu betrachten, sofern

[41]) Vgl. die Fußnote [35]).

Durchmesser der Wirbelröhre als hinreichend klein gegenüber dem stande ihres Schwerpunktes von der Wand aufgefaßt werden kann (Fig. 3).

Eine analoge Behandlung gestattet die wei-
e Möglichkeit: $J_1 > 0$, $J_2 < 0$, $|J_2| \gtrless |J_1|$.
er rotiert das System bei geeigneter Form-
ung der beiden Querschnitte um die gemein-
ne Schwerachse, die diesmal jenseits des von
h Schwerachsen von T_1 und T_2 gebildeten
rallelstreifens verläuft.

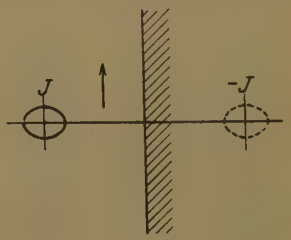


Fig. 3.

Es war bis jetzt stets von einer allseitig begrenzten Flüssigkeit, mithin von unbegrenz- Wirbelzylindern die Rede. Alle Ergebnisse ten unverändert, auch wenn die Flüssigkeit von zwei Ebenen senkht zu den Erzeugenden der Wirbelzylinder begrenzt ist.

§ 3.

Weitere Existenzsätze. Wirbelstraßen von Herrn v. Kármán. Neue Fragestellungen.

Es ist angesichts der in den Gleichungen (17) und (19) hervortreten- Analogie einleuchtend, daß die bekannten Existenzsätze der Theorie r Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, soweit sie sich auf den eidimensionalen Fall, d. h. die Flüssigkeitszylinder beziehen, auf das s hier interessierende Problem geradliniger, paralleler Wirbelröhren in ner unbegrenzten oder doch von zwei Parallelebenen senkrecht zur hrenachse begrenzten Flüssigkeit sinngemäß übertragen werden können. bilden die von G. Kirchhoff entdeckten Wirbelröhren mit elliptischem nerschnitt und konstanter Stärke, die um die Schwerachse gleichförmig tieren, ein Gegenstück zu den elliptischen Zylindern als Gleichgewichtsuren rotierender homogener Flüssigkeit[42]). Es gibt eine lineare Reihe lindrischer, rotierender Wirbelröhren. Abzählbar unendlichviele Zylinder r Reihe führen, als Verzweigungszylinder, zu neuen Figuren rotierender irbelröhren hinüber.

Die soeben hervorgehobene Analogie betrifft freilich lediglich die xistenz-, nicht aber auch die Stabilitätsbetrachtungen.

Noch einige Beispiele ebener Flüssigkeitsbewegungen, die sich auf m vorhin skizzierten Wege exakt behandeln lassen.

1. Ein Wirbelzylinder konstanter Stärke J in einem von zwei unter sich d zu den Wirbelfäden parallelen unendlichen Wänden begrenzten homogenen üssigkeitsmasse. Es wird vorausgesetzt, daß der Querschnitt T der Wirbel-

[42]) Vgl. G. Kirchhoff, Mechanik, S. 261–264. Leipzig 1876.

röhre eine auf den Wänden normale Symmetriegerade hat, und sich nur wenig von einem Kreise unterscheidet. Der Schwerpunkt von T liegt in der Mittelebene des Systems. Sein Durchmesser ist klein im Verhältnis zu dem Abstande der Wände. Die Randkurve S von T ist so zu bestimmen, daß die Bewegung in bezug auf ein festes Achsenkreuz permanent wird (Fig. 4). Es zeigt sich, daß T auch noch eine zu den Wänden parallele Symmetrieachse hat. Die vorliegende Aufgabe kann man auch wie folgt anders fassen. In einer unbegrenzten homogenen Flüssigkeitsmasse befindet sich eine unendliche Folge kongruenter Wirbelröhren. Ihre Achsen sind parallel, liegen sämtlich in einer Ebene und sind paarweise gleich weit voneinander entfernt (Fig. 5). Die Wirbelstärke ist in einer jeden Röhre konstant und beträgt abwechselnd J und $-J$. Man gelangt zu dieser Fassung, wie leicht ersichtlich, durch eine unendliche Folge von Spiegelungen an den beiden Gefäßwänden (Fig. 5).

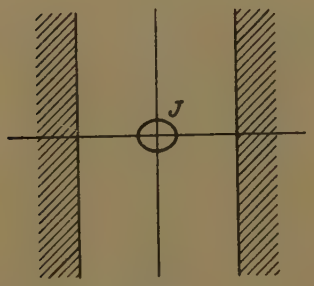


Fig. 4.

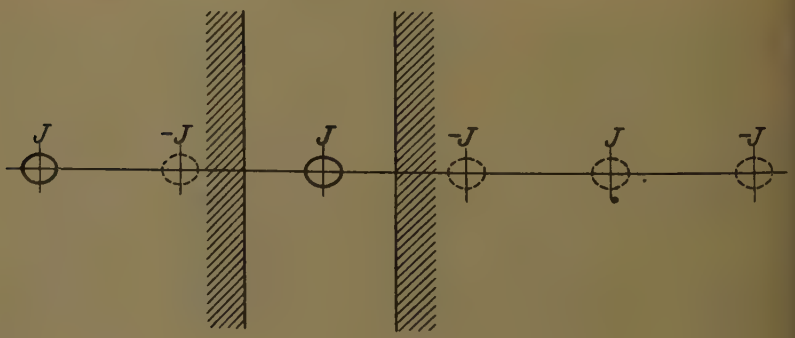


Fig. 5.

2. Ein Wirbelzylinder konstanter Stärke J in einer homogenen Flüssigkeitsmasse, die in ein unbegrenztes prismatisches Gefäß quadratischen Querschnitts eingeschlossen ist. Es wird vorausgesetzt, daß die Wirbelröhre zwei auf den Wänden senkrecht stehende Symmetrieebenen hat und ihre Schwerachse mit der Gefäßachse zusammenfällt. Der (von einem Kreise wenig verschiedene) Querschnitt der Röhre ist so zu bestimmen, daß die Flüssigkeitsbewegung in bezug auf ein festes Achsenkreuz permanent wird (Fig. 6). Auch die beiden Diagonalebenen des Prismas erweisen sich als Symmetrieebenen des Systems.

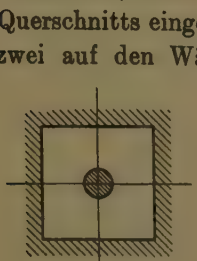


Fig. 6.

Durch fortgesetzte Spiegelungen gelangt man von hier aus zu einer nen Bewegung in einer unbegrenzten homogenen Flüssigkeitsmasse, die ch eine doppelt unendliche Folge kongruenter Wirbelröhren konstanter rke $\pm J$ charakterisiert ist (Fig. 7).

3. Zwei Wirbelstraßen nach Fig. 8 und 9. In einer allseitig unrenzten, homogenen Flüssigkeit sind zwei unendliche Folgen paralleler ndrischer Wirbel untergebracht. Die Schwerachsen liegen in zwei paraln Ebenen und sind in diesen paarweise gleich weit voneinander entt. Die Wirbelstärke ist konstant, und zwar gleich $\pm J$. Mit Wirbelßen dieser Art hat sich Herr von Kármán in seinen bekannten ersuchungen über den Flüssigkeitswiderstand beschäftigt[43]). Herr n Kármán nimmt mit Helmholtz den Querschnitt der Wirbel-

Fig. 7.

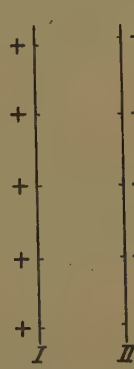


Fig. 8.

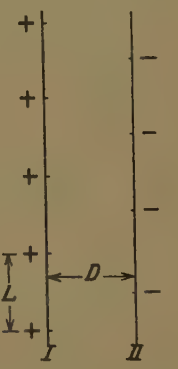


Fig. 9.

ren als unendlich klein, die Gesamtwirbelstärke gleich J bzw. $-J$ und findet, daß die Flüssigkeitsbewegung in bezug auf ein in der chtung der Wirbelstraßen mit geeigneter konstanter Geschwindigkeit tschreitendes Achsenkreuz permanent ist. Auch hier erscheint es naturnäß zu fragen, ob der Querschnitt der Wirbelzylinder, den wir zwar endlich, jedoch klein im Verhältnis zu dem Minimalabstand zweier rbelzylinder annehmen wollen, sich so bestimmen läßt, daß das vorhende Ergebnis exakt zutrifft. Wir führen die folgenden weiteren Vorssetzungen ein.

1. Die Wirbelzylinder der Straße I einerseits, diejenigen der Straße II derseits sind unter sich kongruent und gehen durch Spiegelung an der ttelebene des Systems, im Falle der Fig. 9 begleitet von einer geeigten Translation, ineinander über. 2. Jeder Wirbelzylinder hat eine

[43]) Vgl. Th. v. Kármán, Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein vegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt, Gött. Nachr. 1911, S. 509—517.

Symmetrieebene senkrecht zur Fortschreitungsrichtung. Die Beantwortung unserer Frage hängt mit der Auflösung einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung, auf die man durch konsequente Verfolgung des S. 134 angedeuteten Weges kommt, zusammen. Die Antwort lautet auch hier bejahend.

Herr von Kármán hat sich überdies, und dies ist ein Kernpunkt seiner Untersuchungen, mit der Frage der Stabilität der Systeme Fig. 8 und 9 beschäftigt. Er findet, indem er sich, wie üblich, auf die Betrachtung unendlich kleiner Verrückungen und Geschwindigkeiten beschränkt, das System der Fig. 8 sei labil, die Anordnung der Fig. 9, wenn $\frac{D}{L}$ einen bestimmten Wert hat, stabil. Das System Fig. 9 ist dann gewisser periodischer („stabiler") Bewegungszustände fähig. Hier liegt eine neue Fragestellung vor, insofern als zu vermuten ist, daß bei geeigneter Formgebung des Querschnittes der Wirbelzylinder diese Behauptung in aller Strenge zutrifft.

Drittes Kapitel.

Ein Wirbelring mit kreisförmiger Leitlinie in einer unbegrenzten Flüssigkeit.

§ 1.

Problemstellung.

In dem vorhergehenden Kapitel haben wir die Bewegung eines Systems von zwei parallelen Wirbelröhren in einer inkompressiblen Flüssigkeit behandelt und gewisse von Helmholtz postulierte Sätze begründet. Im Anschluß daran sind dann einige weitere Ergebnisse skizziert worden. In seiner wiederholt genannten fundamentalen Abhandlung beschäftigt sich Helmholtz mit der Bewegung einer homogenen unbegrenzten Flüssigkeit in der sich in einem bestimmten Augenblick eine einzige geschlossene Wirbelröhre befindet, die wie folgt beschaffen ist. Die Wirbellinien sind Kreise in den Ebenen $z = \text{konst.}$, ihre Mittelpunkte liegen auf der Geraden $x = y = 0$. Die Wirbelstärke ist räumlich konstant, der Querschnitt der Wirbelröhre ist unendlich klein. Helmholtz zeigt, indem er sich auch hier mit einer ersten Näherung begnügt, daß unter geeigneten Voraussetzungen bezüglich des Verhaltens im Unendlichen[44]) die Wirbelröhre mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung der z-Achse fortschreitet, ohne ihre Gestalt zu ändern. Dieses Resultat ist bekanntlich später von Lord Kelvin seiner Wirbeltheorie der Atome zugrunde gelegt worden.

[44]) Auf die freilich a. a. O. nicht näher eingegangen wird.

Die Helmholtzsche Theorie ist vor einiger Zeit von Weingarten ner Revision unterzogen worden. Weingarten zeigte, daß, wenn der ruck p etwa im Unendlichen verschwindet, daß dann im Innern der irbelröhre selbst $p \to -\infty$ geht, sobald der Röhrenquerschnitt bei vorgebener Gesamtstärke des Wirbels gegen 0 konvergiert. Ein Kreiswirbel endlich kleinen Querschnitts ist also physikalisch nicht realisierbar[45]).

Wie bei den Untersuchungen des zweiten Kapitels werden wir, um exakten und physikalisch sinnvollen Ergebnissen zu kommen, das Problem e folgt wenden. Betrachten wir eine homogene, unbegrenzte, inkompresble Flüssigkeitsmasse, und es möge das Geschwindigkeitsfeld in einem stimmten Augenblick eine Rotationssymmetrie haben, mit der z-Achse s Symmetrieachse. Die (notwendigerweise geschlossenen) Wirbellinien lden eine einzige Wirbelröhre T_1, die offenbar von einer Rotationsfläche um die z-Achse begrenzt ist. Die Wirbelstärke sei im Innern von T_1 onstant, gleich J, — außerhalb von T_1 ist sie natürlich gleich Null. *ibt es eine Meridiankurve Σ_1, so daß, unter passenden Voraussetzungen züglich des Verhaltens im Unendlichen, die Bewegung der Flüssigkeit, zogen auf ein Achsenkreuz, das mit einer geeigneten Geschwindigkeit in r Richtung der z-Achse fortschreitet, permanent ist*?

Es sei $2\hat{L}$ der Durchmesser des Kreises, der die Schwerpunkte aller eridianschnitte trägt, es sei ferner $\hat{D}$ der Durchmesser eines Meridianhnittes. *Wir werden zeigen, daß es für alle hinreichend kleinen* $\frac{\hat{D}}{\hat{L}}$ *wohl ine Meridiankurve Σ_1 gibt, die die verlangten Eigenschaften hat. Sie nterscheidet sich nur wenig von einem Kreise und hat eine auf der -Achse senkrechte Symmetrielinie.* Der Beweis hängt mit der Auflösung ner nichtlinearen Integro-Differentialgleichung zusammen, die mit einer ntegro-Differentialgleichung in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten nahe verwandt ist. Das Problem, mit dem wir ns augenblicklich beschäftigen, hat nämlich starke formale Ähnlichkeit it der Aufgabe der Bestimmung ringförmiger Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeit ohne Zentralkörper[46]). Diese Ähnlichkeit ird uns gestatten, die Grundlinien des Existenzbeweises zu entwickeln, hne auf alle Einzelheiten des ziemlich komplizierten Beweisganges einehen zu müssen.

---

[45]) Vgl. J. Weingarten, Zur Theorie der Wirbelringe, Gött. Nachr. 1906, . 81—93. S. auch L. S. Da Rios, Sul moto dei filetti vorticosi di forma qualunque, alermo Rendiconti 29 (1910), S. 354—368.

[46]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. ritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper, Math. eitschr. 13 (1922), S. 82—118.

§ 2.

Existenzbeweis.

Wir beginnen mit einigen bekannten Formeln. Wir denken uns den gesamten Raum mit einer homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt und nehmen an, daß das Geschwindigkeitsfeld in einem bestimmten Augenblick t_0 von einem einzigen Kreiswirbel in der Ebene $z = z_0$ mit dem Mittelpunkt auf der z-Achse herrührt. Außer auf dem Kreise $z = z_0$, $x^2 + y^2 = l^2$, der eine singuläre Linie darstellt, ist die Bewegung wirbellos. Die Geschwindigkeitskomponenten, wie auch ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung konvergieren für $R \to \infty$ gegen Null. Der Radius des Wirbels sei l, seine, als konstant vorausgesetzte, Stärke sei J (Fig. 10). Hat das Geschwindigkeitsfeld, wie im vorliegenden Falle Rotationssymmetrie um die z-Achse, so existiert eine Stokessche Strömungsfunktion, $\hat{\mathfrak{B}}(x, z; l, z_0)$. Die Geschwindigkeitskomponenten im Punkte $(x, 0, z)$ der Ebene $y = 0$ $(x \neq 0)$ lassen sich in der Form

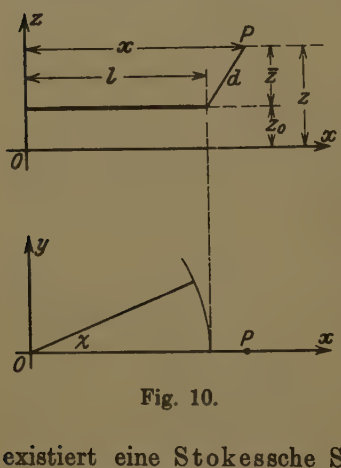


Fig. 10.

$$\frac{1}{x}\frac{\partial \hat{\mathfrak{B}}}{\partial z}, \quad 0, \quad -\frac{1}{x}\frac{\partial \hat{\mathfrak{B}}}{\partial x}$$

darstellen. Die Stokessche Strömungsfunktion im Punkte $(x, 0, z)$ der Ebene $y = 0$ hat alsdann den Wert

$$(1) \qquad \hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{B}}(x, z; l, z_0) = -\frac{Jlx}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\chi\, d\chi}{\sqrt{\bar{z}^2 + (x - l\cos\chi)^2 + l^2\sin^2\chi}} \quad [47]$$

$$(\bar{z} = z - z_0).$$

Für das Integral (1) erhält man nach einigen Umformungen, wobei die bekannten Legendreschen Formeln in der Theorie der elliptischen Integrale zur Anwendung kommen, den Ausdruck

---

[47]) Vgl. beispielsweise H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig und Berlin 1907, S. 275 ff. Die a. a. O. in der Formel (4) vorkommende Größe $\varkappa$ hat im vorliegenden Falle den Wert $2J$.

$$\hat{\mathfrak{V}} = -\frac{Jx}{2\pi}\log\frac{8l}{d}\left\{2-\frac{x-l}{l}+\frac{3}{4}\left(\frac{x-l}{l}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^2+O\left(\frac{d^3}{l^3}\right)\right\}$$
$$-\frac{Jx}{2\pi}\left\{-4+3\frac{x-l}{l}+O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)\right\}.$$ [48])

In (2) bezeichnet $d=((x-l)^2+\bar{z}^2)^{1/2}$ den Abstand des Punktes P dem Kreiswirbel (Fig. 10). Über den analytischen Charakter von $\hat{\mathfrak{V}}$ unterhtet des näheren die Formel

$$\hat{\mathfrak{V}} = -\frac{Jx}{2\pi}\left(2\log\frac{8l}{d}-4\right)$$
$$-\frac{Jx}{2\pi}\log\frac{8l}{d}\,\hat{\mathfrak{P}}_1\left(\frac{x-l}{l},\frac{z-z_0}{l}\right)-\frac{Jx}{4\pi}\,\hat{\mathfrak{P}}_2\left(\frac{x-l}{l},\frac{z-z_0}{l}\right),$$
$$\hat{\mathfrak{P}}_1(0,0)=\hat{\mathfrak{P}}_2(0,0)=0,$$

ter $\hat{\mathfrak{P}}_1$ und $\hat{\mathfrak{P}}_2$ Funktionen verstanden, die für alle hinreichend kleinen erte von $\left|\frac{x-l}{l}\right|$ und $\left|\frac{z-z_0}{l}\right|$ analytisch und regulär sind.

Der Beweis wird wie in der in der Fußnote [46]) genannten Abhandlung 101—102 geführt. An jener Stelle handelt es sich um das Newtonsche tential einer mit Masse 1 für die Längeneinheit belegten Kreislinie

$$\mathfrak{V} = l\int_0^{2\pi}\frac{d\chi}{\sqrt{\bar{z}^2+(x-l\cos\chi)^2+l^2\sin^2\chi}}.$$

ir setzen jetzt

$$l\int_0^{2\pi}\frac{\cos\chi\,d\chi}{\sqrt{\bar{z}^2+(x-l\cos\chi)^2+l^2\sin^2\chi}}$$
$$=l\int_0^{2\pi}\frac{d\chi}{\sqrt{\bar{z}^2+(x-l\cos\chi)^2+l^2\sin^2\chi}}-2l\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{\chi}{2}\,d\chi}{\sqrt{\bar{z}^2+(x-l\cos\chi)^2+l^2\sin^2\chi}}$$
$$=\mathfrak{V}_1(x,z;l,z_0)-\mathfrak{V}_2(x,z;l,z_0)=\mathfrak{V}_1-\mathfrak{V}_2.$$

gilt

*) $$\mathfrak{V}_1=\log\frac{8l}{d}\left\{2-\frac{x-l}{l}-\frac{d^2}{8l^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{x-l}{l}\right)^2+O\left(\frac{d^3}{l^3}\right)\right\}+\frac{x-l}{l}+O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)$$

d

*) $$\mathfrak{V}_2=\log\frac{8l}{d}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2+O\left(\frac{d^3}{l^3}\right)\right\}+4\left(1-\frac{1}{2}\frac{x-l}{l}\right)+O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)$$
$$=4\left(1-\frac{1}{2}\frac{x-l}{l}\right)+\mathfrak{V}_3(x,z;l,z_0).$$

[48]) In (2), wie auch später, bezeichnet O das bekannte durch Landau eingebürgerte Symbol; $O\left(\frac{d^3}{l^3}\right)$ ist beispielsweise eine Funktion, die für alle hinreichend kleinen Werte von $\left|\frac{d}{l}\right|$ in der Form $\frac{d^3}{l^3}\times$ beschränkte Funktion von x, d und l dargestellt werden kann.

Der Ausdruck $\mathfrak{V}_1$ ist mit $\mathfrak{V}$ identisch. Was $\mathfrak{V}_2$ betrifft, so finden sich die nötigen Entwicklungen loc. cit. S. 115—116, wo nur die Bezeichnungen sinngemäß zu ändern sind[49]).

Das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit möge nunmehr von einem System paralleler Kreiswirbel konstanter Stärke J, die einen Kreisringkörper T voll erfüllen, herrühren. Die Symmetrielinie des Systems sei wie vorhin die z-Achse, der Radius des Meridiankreises Σ sei R, der Halbmesser des in der Ebene $z = 0$ gelegenen Kreises, der die Schwerpunkte aller Σ trägt, sei L (Fig. 11). Wegen der Symmetrie des Systems genügt es, die Verhältnisse in der Ebene $y = 0$ zu betrachten. Zur Vereinfachung führen wir ein Koordinatensystem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ durch die Formeln

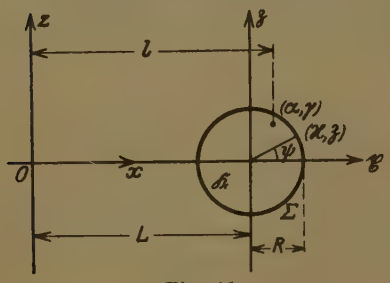


Fig. 11.

$$x = L + \mathfrak{x}, \qquad z = \mathfrak{z} \tag{6}$$

ein. Sei S die Oberfläche von T und $\mathfrak{R}$ der Meridianschnitt $y = 0$ von T. Der Wert der Stokesschen Strömungsfunktion in dem Punkte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}$ von Σ ist augenscheinlich (Fig. 11)

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \int_{\mathfrak{R}} \mathfrak{V}(L + \mathfrak{X}, \mathfrak{Z};\ L + \alpha, \gamma)\, d\alpha\, d\gamma\,. \tag{7}$$

Nach einigen, keinerlei ernste Schwierigkeiten darbietenden, Umformungen erhält man

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = -\frac{JL}{2\pi}\Big\{2\pi R^2 \log\frac{8L}{R} - 4\pi R^2 + \frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 \log\frac{8L}{R} - \frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 - \pi R^2 \frac{R^2}{L^2}\Big(\frac{1}{4}\frac{\mathfrak{X}^2}{R^2} - \frac{1}{2}\Big)\log\frac{8L}{R} + O\Big(\frac{R^2}{L^2}\Big)\Big\}. \tag{8}$$

Was den analytischen Charakter von $\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ anlangt, so gilt

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = -\frac{JL}{2\pi}\hat{\Omega}_1\Big(\frac{\mathfrak{X}}{L}, \frac{\mathfrak{Z}}{L}\Big)\log\frac{8L}{R} + 2JLR^2 + \frac{JL}{2\pi}\hat{\Omega}_2\Big(\frac{\mathfrak{X}}{L}, \frac{\mathfrak{Z}}{L}\Big), \tag{9}$$

$$\hat{\Omega}_2(0, 0) = 0,$$

unter $\hat{\Omega}_1$ und $\hat{\Omega}_2$ Potenzreihen verstanden, die für hinreichend kleine Werte von $\left|\frac{\mathfrak{X}}{L}\right|$ und $\left|\frac{\mathfrak{Z}}{L}\right|$ konvergieren.

Der Beweis der vorstehenden Behauptungen wäre wie auf S. 103—108 meiner vorhin genannten Arbeit zu führen. Dort finden sich u. a. auf

[49]) Für $\bar{\mathfrak{z}}, l, l', \chi'$ ist $\bar{z}, x, l, \chi$ zu setzen.

07 alle bei der Bestimmung von (7) auszuwertenden Integrale zu-mengestellt.

Auf der Peripherie Σ des Kreises $\mathfrak{K}$ ist $\hat{\mathfrak{W}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ eine analytische und läre Funktion von ψ mit der Periode 2π (Fig. 11). Man kann darum h setzen

$$-\frac{2\pi}{JL}\hat{\mathfrak{W}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \frac{\hat{B}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\hat{B}_n \cos n\psi + \hat{A}_n \sin n\psi),$$

r wegen

$$\hat{\mathfrak{W}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \hat{\mathfrak{W}}(\mathfrak{x}, -\mathfrak{z})$$

facher

$$-\frac{2\pi}{JL}\hat{\mathfrak{W}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \frac{\hat{B}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{B}_n \cos n\psi$$

$$= \frac{\hat{B}_0}{2} + \hat{B}_1 \cos\psi + \hat{B}_2 \cos 2\psi + \hat{\mathfrak{B}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}).$$

die Koeffizienten dieser Entwicklung finden sich unmittelbar die Aus-cke

$$\frac{\hat{B}_0}{2} = \pi R^2\left\{\left(2 + \frac{3}{8}\frac{R^2}{L^2}\right)\log\frac{8L}{R} - 4\right\} + \hat{w}_0, \qquad \hat{w}_0 = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

$$\hat{B}_1 = \pi\frac{R^3}{L}\left\{\log\frac{8L}{R} - 1\right\} + \hat{w}_1, \qquad \hat{w}_1 = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

$$\hat{B}_2 = -\frac{\pi}{8}\frac{R^4}{L^2}\log\frac{8L}{R} + \hat{w}_2, \qquad \hat{w}_2 = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

$$\hat{B}_n = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \qquad (n > 2).$$

Alle $\hat{B}_n$ sind von der Form

$$\hat{B}_n = \hat{B}_n' \log\frac{8L}{R} + \hat{B}_n'',$$

er $\hat{B}_n'$ und $\hat{B}_n''$ Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ verstanden, die für hin-chend kleine Werte von $\left|\frac{R}{L}\right|$, etwa $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$, analytisch und regulär d. Man kann ferner

$$\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{B}}' \log\frac{8L}{R} + \hat{\mathfrak{B}}''$$

zen. Auch $\hat{\mathfrak{B}}'$ und $\hat{\mathfrak{B}}''$ sind für $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$ analytisch und regulär. Es weiter (Fig. 11)

$$\hat{\mathfrak{B}}' = O\left(\frac{R^3}{L^3}\right), \quad \frac{d\hat{\mathfrak{B}}'}{ds} = O\left(\frac{R^3}{L^3}\right), \quad \hat{\mathfrak{B}}'' = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \quad \frac{d\hat{\mathfrak{B}}''}{ds} = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

$$s = R\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right).$$

§ 3.

Fortsetzung.

Es sei S_1 eine Rotationsfläche um die z-Achse in der Nachbarschaft erster Ordnung von S (Fig. 12). Der von S_1 begrenzte Körper heiße T_1. Der nächste Schritt ist die Bestimmung der Strömungsfunktion, wenn das Geschwindigkeitsfeld von einem System paralleler Kreiswirbel konstanter Stärke J herrührt, die T_1 erfüllen, und zwar in einem Punkte von S_1.

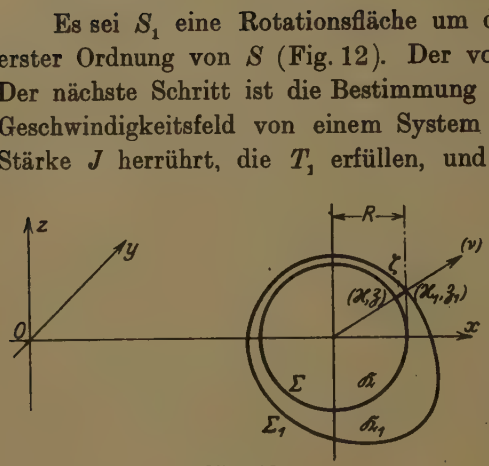


Fig. 12.

Wir denken uns die Lage der Punkte auf S auf ein geeignetes System Gaußscher Parameter ξ und η bezogen. Sei $P(\xi, \eta)$ irgendein Punkt auf S und (ν) die nach außen gerichtete Normale in P. Den soeben gemachten Annahmen gemäß[50] wird S_1 von (ν) nur in einem Punkte P_1 getroffen. Die Strecke PP_1, positiv in der positiven Richtung von (ν) gerechnet, bezeichnen wir mit ζ; ζ ist eine nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige Funktion von s.[51])

Es sei $\hat{U}(\xi, \eta)$ die Strömungsfunktion des vorhin betrachteten, T erfüllenden Wirbelsystems in (ξ, η), $\mathfrak{W}_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = \hat{U}_1(\xi, \eta)$ die zu bestimmende Strömungsfunktion des T_1 erfüllenden Wirbelsystems in P_1. Offenbar ist $\hat{U}(\xi, \eta) = \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$, wenn (ξ, η) die Gaußschen Parameter des Punktes $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ sind. Es seien $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1$ die Koordinaten des Punktes P_1. Augenscheinlich ist

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right), \quad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right). \tag{17}$$

Es sei schließlich Σ_1 die Meridiankurve von T_1 in der Ebene $y = 0$. Der von Σ_1 begrenzte endliche Bereich heiße $\mathfrak{R}_1$. Da wir bereits eine Formel für $\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ besitzen, so genügt es, die Differenz

$$\hat{U}_1(\xi, \eta) - \hat{U}(\xi, \eta) \tag{18}$$

zu berechnen. Nach (1) und (5) ist die Strömungsfunktion eines einzelnen

---

[50]) Nämlich, daß S_1 in einer Umgebung erster Ordnung von S liegt.

[51]) Die Bezeichnungen des Textes schließen sich eng an die loc. cit.[46]) gebrauchten an. In dem ersten Kapitel bedeuteten ξ, η, ζ die Komponenten des Wirbelvektors. Die Gefahr einer Verwechselung liegt nicht vor, da auf die Ergebnisse des ersten Kapitels nicht mehr zurückgegriffen wird.

iswirbels von der Stärke J und dem Radius l in der Ebene $z = z_0$
Punkte (x, z)

$$\hat{\mathfrak{V}}(x, z; l, z_0) = -\frac{Jx}{2\pi}(\mathfrak{V}_1(x, z; l, z_0) - \mathfrak{V}_2(x, z; l, z_0)).$$

finden darum

$$\hat{U}_1(\xi, \eta) - \hat{U}(\xi, \eta) = -\frac{J(L+\mathfrak{X}_1)}{2\pi}\Big\{\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_1(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$-\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_2(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma\Big\}$$

$$+\frac{J(L+\mathfrak{X})}{2\pi}\Big\{\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{V}_1(L+\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$-\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{V}_2(L+\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma\Big\}$$

$$= -\frac{J(L+\mathfrak{X})}{2\pi}\Big\{\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_1(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d;$$

$$-\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{V}_1(L+\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma\Big\}$$

$$+\frac{J(L+\mathfrak{X})}{2\pi}\Big\{\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_2(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d$$

$$-\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{V}_2(L+\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma\Big\} - \frac{J\mathfrak{X}}{2\pi}\frac{\zeta}{R}\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_1(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d$$

$$+\frac{J\mathfrak{X}}{2\pi}\frac{\zeta}{R}\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_2(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma = \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_2 + \mathsf{M}_3 + \mathsf{M}_4.$$

Was zunächst M_1 betrifft, so ist

$$\mathsf{M}_1 = -\frac{J(L+\mathfrak{X})}{2\pi}\{U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)\},$$

er $U(\xi, \eta)$, wie in der wiederholt genannten Arbeit (vgl. S. 88—92),
Newtonsche Potential des mit Masse der Dichte 1 erfüllt gedachten
rpers T in P, $U_1(\xi, \eta)$ dasjenige von T_1 in P_1 verstanden. Für die
ferenz $U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)$ ist a. a. O. S. 88—95 und 109—118 der
gende Ausdruck gewonnen worden (vgl. die Formel (48) S. 95).

$$U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta) = -2\pi R\zeta + 2\int_{\Sigma}\zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' + 2\Theta^* \log\frac{8L}{R}$$

$$+ \mathfrak{U}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + U_*^{(2)} + U_*^{(3)} + \cdots,$$

ter r den Abstand der Punkte s und s' auf Σ, unter Θ^* den Flächen-

inhalt des von Σ und Σ_1 begrenzten Flächenstückes verstanden[52]). Die unendliche Reihe rechterhand konvergiert für alle reellen oder komplexen Werte von ζ und $\frac{R}{L}$, die den Ungleichheiten

$$|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon_2, \qquad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_2 \tag{23}$$

genügen, unbedingt und gleichmäßig. Jedes Glied der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} U_*^{(n)}$ kann (vgl. loc. cit. S. 95) in der Form

$$\mathfrak{E}_1^{(n)} \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{E}_2^{(n)} \qquad (n \geqq 2 \tag{24}$$

dargestellt werden, unter $\mathfrak{E}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(n)}$ Funktionen von $\frac{R}{L}$ verstanden, die in (23) analytisch und regulär sind.

Setzt man

$$\mathfrak{U}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + U_*^{(2)} + U_*^{(3)} + \ldots = \Omega_*\{\zeta\}, \tag{25}$$

so ist

$$|\Omega_*|, \left|\frac{d}{ds}\Omega_*\right| \leqq \alpha_7 \left(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2 \left|\frac{R}{L} \log \frac{8L}{R}\right|\right) \tag{26}$$

und

$$|\Omega_*\{\zeta\} - \Omega_*\{\dot{\zeta}\}|, \left|\frac{d}{ds}\Omega_*\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega_*\{\dot{\zeta}\}\right| \leqq \alpha_7 \mathfrak{m} \left(\varepsilon_2 + \left|\frac{R}{L} \log \frac{8L}{R}\right|\right) \tag{27}$$

In (27) bezeichnet $\dot{\zeta}$ eine beliebige nebst ihrer Ableitung stetige Funktion auf Σ, die den Ungleichheiten

$$|\dot{\zeta}|, \left|\frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right| \leqq \varepsilon_2, \qquad |\zeta - \dot{\zeta}|, \left|\frac{d\zeta}{ds} - \frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right| \leqq \mathfrak{m} \tag{28}$$

genügt.

Für M_1 kann man darum setzen

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_1 &= -\frac{JL}{2\pi}\{U_1(\xi,\eta) - U(\xi,\eta)\}\left(1 + \frac{\mathfrak{x}}{L}\right) \\ &= -\frac{JL}{2\pi}\Big[-2\pi R\zeta + 2\int_{\Sigma} \zeta' \log\frac{R}{r}\, ds' + 2\Theta^* \log\frac{8L}{R} \\ &\qquad + 2\Theta^* \frac{\mathfrak{x}}{L} \log\frac{8L}{R} + \Omega_{*1}\{\zeta\}\Big] \end{aligned} \tag{29}$$

unter $\Omega_{*1}\{\zeta\}$ einen Ausdruck verstanden, der sich ganz ähnlich wie $\Omega_*\{\zeta\}$ verhält[53]).

Gehen wir jetzt zu den anderen Summanden in der Formel (20) über. Vor allem ist wegen (5_*)

[52]) Wir benutzen die Bezeichnungen der wiederholt zitierten Arbeit.

[53]) $\Omega_*\{\zeta\}$ ist, wie auch $\Omega_{*1}\{\zeta\}$, ein Funktional von ζ.

$$\int_{\mathfrak{L}_1} \mathfrak{B}_2(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma - \int_{\mathfrak{L}} \mathfrak{B}_2(L+\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$= 4\int_{\mathfrak{L}_1}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{X}_1-\alpha}{L+\alpha}\Big)\,d\alpha\,d\gamma - 4\int_{\mathfrak{L}}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{X}-\alpha}{L+\alpha}\Big)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$+\int_{\mathfrak{L}_1} \mathfrak{B}_3(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$-\int_{\mathfrak{L}} \mathfrak{B}_3(L+\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma = 4\int_{\mathfrak{L}_1}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{X}_1-\alpha}{L}\Big)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$-4\int_{\mathfrak{L}}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{X}-\alpha}{L}\Big)\,d\alpha\,d\gamma + \Omega_{*_2}\{\zeta\}.$$

Man überzeugt sich ohne wesentliche Schwierigkeiten wie a. a. O., daß

1) $$|\Omega_{*_2}\{\zeta\}|,\ \Big|\frac{d}{ds}\Omega_{*_2}\{\zeta\}\Big| \leqq \alpha^{(1)}\varepsilon_2\Big|\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\Big|,$$

2) $$|\Omega_{*_2}\{\zeta\}-\Omega_{*_2}\{\dot\zeta\}| \leqq \alpha^{(2)}\mathfrak{m}\Big|\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\Big|,$$

3) $$\Big|\frac{d}{ds}\Omega_{*_2}\{\zeta\}-\frac{d}{ds}\Omega_{*_2}\{\dot\zeta\}\Big| \leqq \alpha^{(2)}\mathfrak{m}\Big|\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\Big|$$

t, unter $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ Konstante verstanden, wie später unter $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$ usw. s Funktional $\Omega_{*_2}\{\zeta\}$ verhält sich, was seinen analytischen Charakter langt, ähnlich wie $\Omega_*\{\zeta\}$.

Es gilt nun weiter

4) $$4\int_{\mathfrak{L}_1}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{X}_1-\alpha}{L}\Big)\,d\alpha\,d\gamma - 4\int_{\mathfrak{L}}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{X}-\alpha}{L}\Big)\,d\alpha\,d\gamma = 4\,\Theta^* + \mathsf{M}_5,$$

$$\mathsf{M}_5 = -\frac{2}{L}\int_{\mathfrak{L}_1}(\mathfrak{X}_1-\alpha)\,d\alpha\,d\gamma + \frac{2}{L}\int_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{X}-\alpha)\,d\alpha\,d\gamma$$

5) $$= -\frac{2}{L}\int_{\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}}(\mathfrak{X}-\alpha)\,d\alpha\,d\gamma - \frac{2}{L}\int_{\mathfrak{L}_1}(\mathfrak{X}_1-\mathfrak{X})\,d\alpha\,d\gamma$$

$$= -\frac{2}{L}\int_{\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}}(\mathfrak{X}-\alpha)\,d\alpha\,d\gamma - \frac{2}{L}\zeta\frac{\mathfrak{X}}{R}\int_{\mathfrak{L}_1}d\alpha\,d\gamma.$$

macht jetzt keine Schwierigkeiten zu zeigen, daß M_5 Ungleichheiten n der Form

6) $$|\mathsf{M}_5|,\ \Big|\frac{d}{ds}\mathsf{M}_5\Big| \leqq \alpha^{(3)}\varepsilon_2\Big|\frac{R}{L}\Big|,$$

7) $$|\mathsf{M}_5-\dot{\mathsf{M}}_5|,\ \Big|\frac{d}{ds}\mathsf{M}_5-\frac{d}{ds}\dot{\mathsf{M}}_5\Big| \leqq \alpha^{(4)}\mathfrak{m}\Big|\frac{R}{L}\Big|$$

nügt.

Wir finden jetzt alles in allem für M_2 den folgenden Ausdruck

$$(38)\quad \mathsf{M}_2 = J\frac{L+\mathfrak{x}}{2\pi}[4\Theta^* + \Omega_{*3}\{\zeta\}] = \frac{JL}{2\pi}\left[4\Theta^* + 4\frac{\mathfrak{x}}{L}\Theta^* + \Omega_{*4}\{\zeta\}\right].$$

Hier bezeichnet $\Omega_{*4}\{\zeta\}$ einen Ausdruck, der sich analytisch ähnlich wie $\Omega_*\{\zeta\}$ verhält und den folgenden Ungleichheiten genügt:

$$(39)\quad |\Omega_{*4}\{\zeta\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Omega_{*4}\{\zeta\}\right| \leqq \alpha^{(5)}\left(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2\left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|\right),$$

$$(40)\quad \begin{aligned}&|\Omega_{*4}\{\zeta\} - \Omega_{*4}\{\dot\zeta\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Omega_{*4}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega_{*4}\{\dot\zeta\}\right| \\ &\qquad \leqq \alpha^{(6)}\,\mathfrak{m}\left(\varepsilon_2 + \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|\right).\ ^{54})\end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$(41)\quad \mathsf{M}_3 = -\frac{JL}{2\pi}\left\{\frac{\mathfrak{x}}{R}\frac{\zeta}{L}\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_1(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; L+\alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma\right\} = -\frac{JL}{2\pi}\Omega_{*5}\{\zeta\}.$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß Ω_{*5} sich wie Ω_* verhält.

Ebenso findet man

$$(42)\quad \mathsf{M}_4 = \frac{JL}{2\pi}\left\{\frac{\mathfrak{x}}{R}\frac{\zeta}{L}\int_{\mathfrak{K}_1}\mathfrak{V}_2(L+\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; \alpha, \gamma)\,d\alpha\,d\gamma\right\} = \frac{JL}{4\pi}\Omega_{*6}\{\zeta\}.$$

Auch Ω_{*6} verhält sich wie Ω_{*4}.

Faßt man alle bisherigen Ergebnisse zusammen, so findet man für die Differenz $\hat U_1(\xi,\eta) - \hat U(\xi,\eta)$ den Ausdruck

$$(43)\quad \begin{aligned}\hat U_1(\xi,\eta) - \hat U(\xi,\eta) = -\frac{JL}{2\pi}\Big[&-2\pi R\zeta + 2\int_{\mathfrak{S}}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds' + 2\Theta^*\log\frac{8R}{h} \\ &-4\Theta^* + 2\Theta^*\frac{\mathfrak{x}}{L}\log\frac{8L}{R} - 4\frac{\mathfrak{x}}{L}\Theta^* + \Omega_{*7}\{\zeta\}\Big],\end{aligned}$$

darum für die gesuchte Strömungsfunktion $\hat{\mathfrak{W}}_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = U_1(\xi,\eta)$ die Formel

$$(44)\quad \begin{aligned}\hat{\mathfrak{W}}_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) - \frac{JL}{2\pi}\Big[&-2\pi R\zeta + 2\int_{\mathfrak{S}}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds' + 2\Theta^*\log\frac{8R}{h} \\ &-4\Theta^* + 2\Theta^*\frac{\mathfrak{x}}{L}\log\frac{8L}{R} - 4\frac{\mathfrak{x}}{L}\Theta^* + \Omega_{*7}\{\zeta\}\Big].\end{aligned}$$

Auch der Ausdruck $\Omega_{*7}\{\zeta\}$ verhält sich wie $\Omega_{*4}\{\zeta\}$.

---

[54]) $\Omega_{*3}\{\zeta\}$ verhält sich ebenso.

§ 4.

Fortsetzung.

Wir nehmen jetzt an, daß der Körper T_1 sich in der Richtung der chse mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{JL}{2\pi}c$ bewegt. Wir führen ein tem mit T_1 fest verbundener, zu x, y, z paralleler Achsen $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ und men an, daß in dem gerade betrachteten Augenblick die beiden Achsen- uze zusammenfallen. Wir bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten Flüssigkeitsteilchens $(x, 0, z)$ in der Ebene $y = 0$, auf die festen . bewegten Achsen bezogen, mit $u, 0, w$ und $\underline{u}, 0, \underline{w}$. Offenbar ist

$$\underline{u} = u, \qquad \underline{w} = w - \frac{JL}{2\pi}c. \tag{)}$$

Hat das Geschwindigkeitsfeld, wie im vorliegenden Falle, Rotationssym- trie um die z-Achse, so existiert eine Stokessche Strömungsfunktion. Wert im Punkte $x, 0, z$ möge $\Psi(x, z)$ heißen[55]). Die Geschwindig- tskomponenten u, w im Punkte $(x, 0, z)$ $(x \neq 0)$ lassen sich in der m

$$u = \frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad w = -\frac{1}{x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{6)}$$

rstellen. Die Gleichung

$$\Psi(x, z) = e. \text{ Konst.} \tag{7)}$$

t die Schar der Stromlinien in der Ebene $y = 0$.

Die auf die bewegten Achsen bezogene (relative) Stokessche Strö- ngsfunktion ist, wie man leicht sieht,

$$\underline{\Psi}(\underline{x}, \underline{z}) = \Psi(x, z) + \frac{JL}{2\pi}c\frac{x^2}{2}. \tag{8)}$$

der Tat ist

$$\underline{u} = \frac{1}{\underline{x}}\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial \underline{z}}, \qquad \underline{w} = -\frac{1}{\underline{x}}\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial \underline{x}} = w - \frac{JL}{2\pi}c. \tag{9)}$$

Soll die Flüssigkeitsbewegung, bezogen auf die mitbewegten Achsen, rmanent sein, so muß, wie man leicht sieht, die Randkurve Σ_1 eine lative Stromlinie bilden[56]), demnach auf Σ_1

$$\Psi + \frac{JL}{2\pi}c\frac{x^2}{2} = \mathfrak{W}_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) + \frac{c}{2}\frac{JL}{2\pi}\left\{L + \mathfrak{x}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\right\}^2 = \frac{JL}{2\pi}c_* \tag{0)}$$

$(c_*$ konstant$)$

---

[55]) Die Funktion $\Psi(x, z)$ ist mit der vorhin eingeführten Funktion $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = U_1(\xi, \eta)$ identisch.

[56]) Man vergleiche die Ausführungen auf S. 131.

sein. Für (50) können wir wegen (44) und (12) auch schreiben

$$
\begin{aligned}
&-\frac{JL}{2\pi}\Big[-2\pi R\zeta+2\int_{\Sigma}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds'+2\Theta^*\log\frac{8L}{R}-4\Theta^*\\
&\qquad+2\Theta^*\frac{\mathfrak{x}}{L}\log\frac{8L}{R}-4\frac{\mathfrak{x}}{L}\Theta^*+\frac{\hat{B}_0}{2}+\hat{B}_1\cos\psi+\hat{B}_2\cos 2\psi\\
&\qquad+\mathfrak{B}(\mathfrak{x},\mathfrak{z})+\Omega_{*7}\{\zeta\}\Big]\\
&+\frac{c}{2}\frac{JL}{2\pi}\Big\{L^2+2L\mathfrak{x}+2L\mathfrak{x}\frac{\zeta}{R}+\mathfrak{x}^2\Big(1+\frac{\zeta}{R}\Big)^2\Big\}-\frac{JL}{2\pi}c_*=0,
\end{aligned}
\tag{51}
$$

oder einfacher

$$
\begin{aligned}
&2\pi R\zeta-2\int_{\Sigma}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds'=c_*+\frac{\hat{B}_0}{2}+\hat{B}_1\cos\psi+\hat{B}_2\cos 2\psi\\
&\qquad+\mathfrak{B}(\mathfrak{x},\mathfrak{z})+2\Theta^*\log\frac{8L}{R}-4\Theta^*+2\Theta^*\frac{\mathfrak{x}}{L}\log\frac{8L}{R}-4\frac{\mathfrak{x}}{L}\Theta^*\\
&\qquad-\frac{c}{2}\Big\{L^2+2L\mathfrak{x}+2L\mathfrak{x}\frac{\zeta}{R}+\mathfrak{x}^2\Big(1+\frac{\zeta}{R}\Big)^2\Big\}+\Omega_{*7}.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Dies ist eine Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ. Sie ist zu der auf S. 96 der wiederholt zitierten Arbeit aufgestellten Integro-Differentialgleichung analog.

§ 5.

Die Integro-Differentialgleichung des Problems.

Die homogene Integralgleichung

$$\zeta-\frac{1}{\pi R}\int_{\Sigma}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds'=0 \tag{53}$$

hat zwei linear unabhängige Eigenfunktionen:

$$u_1=\frac{\sin\psi}{\sqrt{\pi R}},\qquad u_3=\frac{\cos\psi}{\sqrt{\pi R}}.\ ^{57}) \tag{54}$$

Wir setzen

$$\frac{1}{\pi R}\log\frac{R}{r}=u_1u_1'+u_3u_3'+N(s,s') \tag{55}$$

---

[57]) Die Bezeichnungen sind den loc. cit. [46]) S. 96 u. ff. gebrauchten angepaßt. Es gilt

$$\int_{\Sigma}u_1^2\,ds=\int_{\Sigma}u_3^2\,ds=1.$$

Wir schreiben zur Abkürzung für $u_1(s')$, $u_3(s')$ entsprechend u_1' und u_3'. Eine Verwechselung der Funktionen u_1, u_3 mit der Geschwindigkeitskomponente u ist nicht zu befürchten.

erhalten

$$\zeta - \frac{1}{\pi R}\int_{\Sigma} \zeta' \log\frac{R}{r}\, ds' = \zeta - u_1 \int_{\Sigma} u_1' \zeta' ds' - u_3 \int_{\Sigma} u_3' \zeta' ds' - \int_{\Sigma} N\zeta' ds'.$$

Der Kern N hat keine Nullösungen mehr. Nach Voraussetzung soll die chte Meridiankurve Σ_1 die x-Achse zur Symmetrieachse haben. Dar- ist

$$\int_{\Sigma} u_1' \zeta' ds' = 0.$$

Wir werden jetzt die Fortschreitungsgeschwindigkeit $\frac{JL}{2\pi} c$ *und die stante* c_* *so bestimmen, daß der Ausdruck*

$$\int_{\Sigma} u_3' \zeta' ds' = 0$$

l. Wir setzen, um dies zu erreichen, *unter* $\mathfrak{w}$ *einen zu bestimmenden ameter verstehend,*

$$\frac{\hat{B}_1}{R} + \frac{2}{L}\Theta^* \log\frac{8L}{R} - 4\frac{\Theta^*}{L} - cL - \frac{\mathfrak{w}}{R} = 0,$$

in

$$-c = -\frac{\hat{B}_1}{RL} - \frac{2}{L^2}\Theta^* \log\frac{8L}{R} + 4\frac{\Theta^*}{L^2} + \frac{\mathfrak{w}}{RL}$$

$$c^* + \frac{\hat{B}_0}{2} + 2\Theta^* \log\frac{8L}{R} - 4\Theta^* - \frac{c}{2}\left(L^2 + \frac{R^2}{2}\right) = 0$$

finden nach einer leichten Umformung

$$\boxed{\begin{aligned} 2\pi R\zeta - 2\pi R\int_{\Sigma} N\zeta' ds' &= \mathfrak{w}\cos\psi + \left(\hat{B}_2 - \frac{c}{4}R^2\right)\cos 2\psi \\ &+ \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) - \frac{c}{2}\left(2L\mathfrak{X}\frac{\zeta}{R} + 2\mathfrak{X}^2\frac{\zeta}{R} + \mathfrak{X}^2\frac{\zeta^2}{R^2}\right) + \Omega_{*7} \end{aligned}}$$

ei ist

$$\hat{B}_2 - \frac{c}{4}R^2 = -\frac{3\pi}{8}\frac{R^4}{L^2}\left(1 + \frac{4}{3\pi}\frac{\Theta^*}{R^2}\right)\log\frac{8L}{R} + \frac{1}{4}\pi\frac{R^4}{L^2}\left(1 + \frac{4\Theta^*}{\pi R^2}\right)$$
$$+ \hat{w}_2 - \frac{R}{4L}\hat{w}_1 + \frac{\mathfrak{w}}{4L}\cdot R.$$

Der Parameter $\mathfrak{w}$ ist in (62), wenn man von dem Ausdruck $\mathfrak{w}\cos\psi$ eht, nur noch in dem zweiten Summanden und in den mit c behafteten edern vertreten; er ist, wie man sich leicht überzeugt, entsprechend $\frac{R}{L}$, ζ, $\frac{R}{L}\zeta$, $\frac{R}{L}\zeta^2$ multipliziert.

Die rechte Seite von (62) ist eine Funktion der Parameter $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'=\frac{R}{L}$, $\mathfrak{w}''=\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}$, die sich für alle hinreichend kleinen Werte von $|\mathfrak{w}|$, $|\mathfrak{w}'|$, $|\mathfrak{w}''|$ analytisch und regulär verhält. Wie in meinen wiederholt zitierten Abhandlungen läßt sich zeigen, daß (62) für jeden Wertetripel $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$, $\mathfrak{w}''$ in den Bereichen

$$|\mathfrak{w}|, |\mathfrak{w}'|, |\mathfrak{w}''| \leqq h_3 \leqq h_2 \tag{64}$$

eine und nur eine Lösung hat. Diese Lösung kann durch sukzessive Approximationen gewonnen und nach Potenzen von $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$, $\mathfrak{w}''$ entwickelt werden. Wie man sich ohne ernstliche Schwierigkeiten überzeugt, sind alle sukzessiven Näherungen in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch. Also ist auch die Lösung in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch[58]).

Für das Gelingen des Verfahrens ist wie an der angeführten Stelle das Bestehen gewisser Ungleichheiten entscheidend. Diese Ungleichheiten ergeben sich leicht aus den im vorstehenden zusammengestellten Beziehungen (15), (16), (13), (26), (27), (39), (40), (44) und (62).[59])

Wir bezeichnen vorübergehend die rechte Seite von (62) mit $\mathfrak{w}\cos\psi+\Pi\{\zeta\}$ und nehmen

$$\begin{gathered}|\mathfrak{w}| \leqq \delta^* \leqq h_3, \qquad |\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon^* \leqq \varepsilon_2; \qquad |\mathfrak{w}'| = \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h^* \leqq h_3 \\ |\mathfrak{w}''| = \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right| \leqq h^*\end{gathered} \tag{65}$$

an[60]). Alsdann ist, wie sich leicht zeigen läßt,

$$|\Pi\{\zeta\}|, \left|\frac{d}{ds}\Pi\{\zeta\}\right| \leqq \alpha^{(7)}(h^{*2}+h^*\delta^*+h^*\varepsilon^*+\varepsilon^*\delta^*+\varepsilon^{*2}). \tag{66}$$

Es gilt ferner, wenn auch

$$|\dot\zeta|, \left|\frac{d\dot\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon^* \tag{67}$$

ist,

$$|\Pi\{\zeta\}-\Pi\{\dot\zeta\}|, \left|\frac{d}{ds}\Pi\{\zeta\}-\frac{d}{ds}\Pi\{\dot\zeta\}\right| \leqq \alpha^{(8)}(h^*+\delta^*+\varepsilon^*)\mathfrak{m} \tag{68}$$

Diese Ungleichheiten sind den entsprechenden Ungleichheiten der in der Fußnote [58]) genannten Abhandlungen ganz analog[61]).

---

[58]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung, Math. Zeitschrift 7 (1920), S. 126—231, insb. S. 156—165. Erste Abhandlung, ebenda 6 (1918), S. 229—284, insb. S. 277—278.

[59]) Man beachte, daß Ω_{*7} sich wie Ω_{*6} verhält.

[60]) Hier werden $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ als voneinander unabhängige Parameter aufgefaßt.

[61]) Vgl. die zweite Abhandlung S. 158 die Formel (13), S. 162 die Formeln (41) und (42).

Es ist nicht schwer, die ersten Glieder der Entwicklung von ζ zu timmen. Man findet

$$\zeta = \frac{\mathfrak{w}}{2\pi R}\cos\psi - \frac{3}{16}\frac{1}{2\pi R}\frac{\pi R^4}{L^2}\log\frac{8L}{R}\cos 2\psi + \mathfrak{P}(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \mathfrak{w}'').$$

$\mathfrak{P}$ sind die von $\mathfrak{w}$ freien Glieder von der Ordnung $\frac{R^2}{L^2}$, Glieder von der rm $f(s)\mathfrak{w}$ $(f(s) = O(1))$ fehlen ganz.

Setzt man jetzt in die Beziehung

$$\int_S u_3'\zeta'\,d\sigma' = 0$$

ζ den Ausdruck (69) ein, so findet man wegen

$$\frac{1}{2\pi R}\int_S u_3'\cos\psi'\,ds' = \frac{R}{2\pi R\sqrt{\pi R}}\int_0^{2\pi}\cos^2\psi'\,d\psi' = \frac{1}{2\sqrt{\pi R}},$$

$$\int_S u_3'\cos 2\psi'\,ds' = 0$$

ie Gleichung von der Form

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi R}}\mathfrak{w} + \mathfrak{p}(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \mathfrak{w}'') = 0,$$

s der sich

$$\mathfrak{w} = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$$

gibt. Demnach ist

$$\boxed{\zeta = \frac{3}{32}\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\cdot\cos 2\psi + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)}$$

nd mit Rücksicht auf (60) und (13)

$$c = \frac{\pi R^2}{L^2}\left\{\log\frac{8L}{R} - 1\right\} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

ithin die konstante Fortschreitungsgeschwindigkeit des Wirbelringes

$$\boxed{\frac{JL}{2\pi}c = \frac{JR^2}{2L}\left\{\log\frac{8L}{R} - 1\right\} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)}.$$ [62])

[62]) Lord Kelvin gibt einen analogen Ausdruck mit $\frac{1}{4}$ an Stelle von 1, desgleichen W. M. Hicks. Die Formel (77) finden hingegen J. J. Thomson, T. C. Lewis und C. Chree. Vgl. A. E. H. Love, Hydrodynamik II, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV 16, S. 118, Fußnote [113]).

Da L gewiß $> R$ ist, so ist $\log \frac{8L}{R} > \log 8 > 2$, somit, wie zu erwarten war, $\frac{JL}{4\pi} c > 0$ für $J > 0$.

Da, wie bereits erwähnt, ζ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch ist[63]), so ist die Beziehung (57) erfüllt. Wegen (57) und (58) genügt der Wert (75) für ζ der Integro-Differentialgleichung (52).

§ 6.

Eine neue Aufgabe.

Wir wollen unsere Betrachtungen mit einer neuen Fragestellung beschließen.

In einer allseitig unbegrenzten Masse homogener, inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeit mögen sich zur Zeit t_0 zwei einander spiegelbildlich ähnliche Wirbelröhren befinden, während außerhalb dieser das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei ist. Alle Wirbellinien sind in parallelen Ebenen gelegene Kreise, ihre Mittelpunkte liegen auf einer Geraden[64]). Nach Helmholtz werden die beiden Wirbelröhren, wenn ihre Gesamtwirbelstärken einander gleich, ihre Querschnitte aber unendlich klein sind, bei geeigneten Bedingungen im Unendlichen umeinander rotieren. Ihre Durchmesser werden sich dabei abwechselnd vergrößern und verkleinern, während zur Zeit $t_0 + t$, $t_0 + 2t, \ldots$, unter t eine geeignete Konstante verstanden, die relative Lage die gleiche wie zur Zeit t_0 ist[65]). Es ist anzunehmen, daß dieses durch heuristische Betrachtungen gewonnene Resultat bei geeigneter Formgebung der diesmal als endlich vorauszusetzenden Querschnitte der beiden Wirbelröhren in aller Strenge gilt. Der Beweis dürfte durch sinngemäße Weiterführung der Methoden dieser Arbeit zu erbringen sein. Das Hauptresultat des zweiten Kapitels stellt augenscheinlich einen Grenzfall dar. Hier rotieren die beiden Zylinder, in die diesmal die Wirbelröhren übergehen, ohne Formänderung umeinander.

Leipzig, den 16. Mai 1924.

---

[63]) Daß ζ diese Eigenschaft hat, ließe sich auch wie in der in der Fußnote [58]) an zweiter Stelle genannten Abhandlung zeigen.

[64]) Die Wirbelstärke ist konstant. Der geometrische Ort der Mittelpunkte steht auf der Ebene der Kreise senkrecht.

[65]) Vgl. loc. cit. [3]).

(Eingegangen am 16. Mai 1924.)

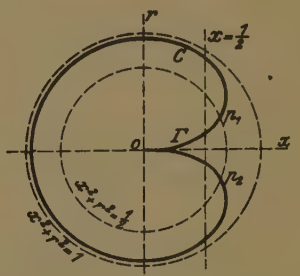
Zur ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Ein Fall der Unlösbarkeit*).

Von

Paul Urysohn † in Moskau.

Bekanntlich ist im zweidimensionalen Falle die Randwertaufgabe der entialtheorie für einfach zusammenhängende Gebiete *immer* lösbar, sogar n beliebige nicht-Jordansche Gebietsgrenzen zugelassen werden[1]). Ich dagegen zeigen, daß *im dreidimensionalen Raume die Aufgabe sogar ganz elementaren Fällen unlösbar werden kann.*

Es sei nämlich C eine geschlossene analytische Kurve in der (x, r)-Ebene, die zur Achse symmetrisch ist, im Koordinatenanfange eine Spitze hat, sonst aber regulär und convex ist. Wir setzen außerdem voraus, daß C innerhalb des Kreises $x^2 + r^2 = 1$ liegt, und daß sie vom Kreise $x^2 + r^2 = \frac{1}{2}$ in zwei Punkten p_1 und p_2, deren Abszissen $> \frac{1}{2}$ sind, getroffen wird. Derjenige



*) Erst nach Drucklegung der Arbeit ist der Schriftleitung bekannt geworden, Herr Lebesgue vor längerer Zeit schon ein sehr einfaches Beispiel für die hier rage kommende Eigentümlichkeit gegeben hatte. (Vgl. H. Lebesgue, Bulletin de ociété mathématique de France, Comptes rendus des séances (1913), S. 48—50). Veröffentlichung der in allen Einzelheiten durchgeführten Betrachtungen des h einen beklagenswerten Unglücksfall der Wissenschaft entrissenen Verfassers te dennoch nicht ohne Interesse sein. Es sei bei dieser Gelegenheit auf einige en der Herren Bouligand und H. Lebesgue in den C. R. 1923, 1924 und entlich auf verschiedene Arbeiten von Herrn N. Wiener hingewiesen. (Vgl. u. a. Viener, C. R. 178 (1924), S. 1050—1053, Journal of Mathematics and Physics he Massachusetts Institute of Technology 3, Nr. 3 (1924), S. 127—146. Dort et sich auch weitere Literatur angegeben). Die Schriftleitung.

[1]) H. Lebesgue, Palermo Rend. 24 (1907), S. 371; R. Courant, Journ. f. h. 144 (1914), S. 190.

Bogen Γ von C, der von 0 auslaufend im ersten Quadranten bis zum Schnittpunkte mit $x = \frac{1}{2}$ läuft, kann also durch eine Gleichung

$$r = \varphi(x) \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$$

dargestellt werden, wo $\varphi(x) > 0$ für $x > 0$ und monoton wachsend ist. *Wir setzen noch voraus, daß*

$$\varphi(x) < e^{-\frac{3}{x}} \quad \left(0 < x \leqq \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

ist, d. h. daß die Spitze spitz genug ist.

Wenn wir C um Ox drehen, so entsteht im (x, y, z)-Raume $(r^2 = y^2 + z^2)$ eine *geschlossene Fläche F, die, außer in O, durchweg regulär ist*, und die ein einfach-zusammenhängendes Gebiet G umschließt. Ich will zeigen, daß *für dieses Gebiet die Randwertaufgabe* z. B. dann *unlösbar ist*, wenn die Randwerte gleich

$$1 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

gesetzt werden.

Beweis. Wenn es in G eine den angegebenen Randwerten sich stetig anschließende Potentialfunktion $W(x, y, z)$ gäbe, so wäre insbesondere $W(0, 0, 0) = 1$; wir könnten also eine ganze positive Zahl $q \geqq 2$ derart wählen, daß

$$W\left(-\frac{1}{2^q}, 0, 0\right) > \frac{7}{8} \tag{2}$$

wäre. Ich werde aber zeigen, daß (2) zu einem Widerspruche führt.

Wir betrachten dazu die Potentialfunktion

$$V_\alpha^\beta(x, r) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}} \qquad (\beta > \alpha) \tag{3}$$

sie ist außerhalb der Strecke (α, β) der x-Achse durchweg regulär und positiv und verschwindet im Unendlichen; sie nimmt bei festem x mit $\frac{1}{r}$ ab und erhält auf einer jeden Parallele zur x-Achse im Punkte $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ihren größten Wert: um letzteres zu beweisen, genügt es in der Tat wegen des Verhaltens im Unendlichen zu zeigen, daß

$$\frac{\partial V_\alpha^\beta(x, r)}{\partial x} = -\int_\alpha^\beta \frac{(t-x)\,dt}{((x-t)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nur in diesem Punkte verschwindet, was aber, da der Integrand eine ungerade Funktion von $t - x$ ist, unmittelbar einleuchtet. Endlich ist

$$V_\alpha^\beta(\alpha, r) = V_\alpha^\beta(\beta, r);$$

Bedingungen

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \sqrt{y^2+z^2} = r \leqq c$$

en also

$$V_a^\beta(x, r) \geqq V_a^\beta(\beta, c)$$

Folge.

Wir führen jetzt die Konstanten

$$a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{und} \quad c_n = \varphi(a_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots, q)$$

(wo q durch (2) erklärt ist) und betrachten die Potentialfunktion

$$V(x, y, z) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{q-1} \frac{V_{a_{n+1}}^{a_n}(x, r)}{V_{a_{n+1}}^{a_n}(a_n, c_n)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{V_0^{a_q}(x, r)}{V_0^{a_q}(a_q, c_q)}.$$

Ich behaupte, daß $V(x, y, z)$ in keinem Punkte der Grenze F kleiner $W(x, y, z)$ ist. Es sei in der Tat Φ derjenige Teil von F, der bei Drehung aus Γ entstanden ist. In einem außerhalb Φ gelegenen nzpunkte ist dann $W < \frac{3}{4}$ und, da alle Glieder der Summe (5) positiv l, $V > \frac{3}{4}$; und in einem zu Φ gehörenden Punkte (x, r) ist $W \leqq 1$, rend wenigstens ein nicht konstanter Summand von (5) $\geqq \frac{1}{4}$ ist: ist nlich $a_{n+1} < x \leqq a_n$ bzw. $0 < x \leqq a_q$, so folgt aus (4), daß

$$\frac{V_{a_{n+1}}^{a_n}(x, r)}{V_{a_{n+1}}^{a_n}(a_n, c_n)} \geqq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{V_0^{a_q}(x, r)}{V_0^{a_q}(a_q, c_q)} \geqq 1$$

In allen Punkten von F ist also $W \leqq V$; da aber W und V inner- b G reguläre Potentialfunktionen sind, so wird diese Ungleichung auch G, also insbesondere im Punkte $\left(-\frac{1}{2^q}, 0, 0\right)$ gelten; d. h. die Existenz W hätte wegen (2) die Ungleichung

$$V\left(-\frac{1}{2^q}, 0, 0\right) > \frac{7}{8}$$

Folge. Wir werden jetzt nachweisen, daß letztere falsch ist. Sie ist nlich zufolge (5) mit der Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{q-1} \frac{V_{a_{n+1}}^{a_n}\left(-\frac{1}{2^q}, 0\right)}{V_{a_{n+1}}^{a_n}(a_n, c_n)} + \frac{V_0^{a_q}\left(-\frac{1}{2^q}, 0\right)}{V_0^{a_q}(a_q, c_q)} > \frac{1}{2}$$

uivalent. Nun ist aber, wenn $x < \alpha$ ist,

$$V_a^\beta(x, 0) = \int_a^\beta \frac{dt}{t-x} = \log \frac{\beta - x}{\alpha - x},$$

also

$$(8)\qquad V_{a_{n+1}}^{a_n}\left(-\frac{1}{2^q},0\right)=\log\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^q}}{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^q}}<\log\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{q-1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^q}}=\log 2$$

und

$$(9)\qquad V_0^{a_q}\left(-\frac{1}{2^q},0\right)=\log\frac{\frac{1}{2^q}+\frac{1}{2^q}}{\frac{1}{2^q}}=\log 2.$$

Andererseits ist zufolge (1)

$$2^{n+1}c_n=2^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)<2^{n+1}e^{-3\cdot 2^n}=e^{(n+1)\log 2-3\cdot 2^n}\leqq e^{2^n-3\cdot 2^n}=e^{-2^{n+1}},$$

also jedenfalls $2^n c_n<\frac{1}{2}$; indem wir $\frac{1}{2^n}-t=\frac{u}{2^n}$ setzen, erhalten wir also folgende Ungleichungen:

$$V_{a_{n+1}}^{a_n}(a_n,c_n)=\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}}\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{2^n}-t\right)^2+c_n^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u^2+2^{2n}c_n^2}}>$$

$$>\int_{2^n c_n}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u^2+2^{2n}c_n^2}}>\int_{2^n c_n}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{2u^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\frac{1}{2}}{2^n c_n}>\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{e^{-2^{n+1}}}=\sqrt{2}\cdot 2^n$$

und

$$V_0^{a_q}(a_q,c_q)=\int_0^{\frac{1}{2^q}}\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{2^q}-t\right)^2+c_q^2}}>\int_{\frac{1}{2^{q+1}}}^{\frac{1}{2^q}}\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{2^q}-t\right)^2+c_q^2}}>\sqrt{2}\cdot 2^q.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt, wegen (8) und (9), daß die linke Seite von (7) kleiner als

$$\log 2\sum_{n=1}^{q-1}\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2^n}+\frac{\log 2}{\sqrt{2}\cdot 2^q}<\frac{\log 2}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\log 2}{\sqrt{2}}$$

ist; da aber $\log 2<0{,}7$ und $\sqrt{2}>1{,}4$ ist, so ist diese linke Seite tatsächlich $<\frac{1}{2}$, womit die Unrichtigkeit von (7), also die Richtigkeit unserer Behauptung nachgewiesen ist.

(Eingegangen am 2. Oktober 1923.)

ber die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

Von

F. und R. Nevanlinna in Helsingfors (Finnland).

Herr Littlewood hat freundlichst uns auf einen Fehler aufmerksam
acht, der in unserem Aufsatz mit dem obigen Titel (Band 20, Heft 3/4,
53—263 dieser Zeitschrift) eingeschlichen ist. Die in Formel (3), S. 254
$N(t)$ bezeichnete Größe ist irrtümlich als die Anzahl der innerhalb
Rechtecks $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau < t$ fallenden Nullstellen der Funktion
) $(s = \sigma + i\tau)$ definiert worden, während sie tatsächlich die Anzahl
innerhalb des Kreises $|s - \frac{1}{2}| < t$ liegenden nichttrivialen Nullstellen
er Funktion angibt. Man sieht sogleich ein, daß dieser Umstand auf
Konsequenzen, die aus der genannten Formel auf S. 260—261 gezogen
den, keinen wesentlichen Einfluß hat.

Auf S. 254 wird ferner behauptet, daß aus der Littlewoodschen
mel

$$\int_0^T R(t)\,dt = \frac{7}{8}T + O(\log T),$$

auch in unserer Arbeit bewiesen wird, nicht unsere Formel (4), son-
n nur

$$\int_0^T \frac{R(t)}{t}\,dt = \frac{7}{8}\log T + O(1)$$

olgert werden kann. Tatsächlich ergibt die Littlewoodsche Formel
nittelbar

$$\int_0^T \frac{R(t)}{t}\,dt = \frac{7}{8}\log T + \text{Const.} + O\left(\frac{\log T}{T}\right),$$

wobei jedoch der Wert der rechts auftretenden Konstanten vorläufig unbekannt ist, während unsere Formel für sie den Wert

$$\varkappa = -\frac{1}{2}\log\left|\xi\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \frac{1}{8}\log\frac{\pi}{2}$$

liefert.

Endlich hat Herr Valiron uns freundlichst darauf aufmerksam gemacht, daß er schon die Jensensche Formel beim Studium der Wurzeln der Riemannschen Zetafunktion verwendet hatte (Thèse de la Faculté de Paris 1914, S. 127—135). $N(T)$ bezeichne die Anzahl der nicht reellen Wurzeln von $\zeta(s)$ im Kreise $|s-\frac{1}{2}|<T$. Dann zeigte Herr Valiron: Für mindestens ein T in einem Intervall der Länge 1 ist (wenn $R(t)$ unsere Bedeutung hat)

$$\int_0^T \frac{R(t)}{t}\,dt = \frac{7}{8}\log T + B_2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\vartheta'}^{\vartheta'} \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+Te^{i\vartheta}\right)\right| d\vartheta + O\left(\frac{\log T}{T}\right),$$

wo B_2 eine Konstante ist; den numerischen Wert derselben gab er allerdings auf S. 131 unkorrekt an, während unser Wert $\varkappa$ der richtige ist. Herr Valiron leitete aus jener Identität einerseits die von Mangoldtsche Formel ab, andererseits eine Formel, welche unserer Formel (3) analog, aber weniger scharf ist. Er macht uns allerdings darauf aufmerksam, daß unsere Formel (3) auch durch seine Methode erhalten werden kann; diese Methode unterscheidet sich von unserer vor allem dadurch, daß die Abschätzung des Integrals

$$J_4(T) = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta'}^{\frac{\pi}{2}} \log\left|\frac{\xi\left(\frac{1}{2}+Te^{i\vartheta}\right)}{\xi\left(\frac{1}{2}+Te^{i\vartheta'}\right)}\right| d\vartheta,$$

welches unser Integral $J_3(T)$ ersetzen kann, elementar geschieht. Wenn $s_n=\sigma_n+i\tau_n$ $(\tau_n>0)$ eine Wurzel der geraden Funktion $\xi(\frac{1}{2}+s)$ ist, hat man

$$\pi J_4(T) = \sum u_n,\quad u_n = \int_{\vartheta'}^{\frac{\pi}{2}} \log\left|\frac{T^2e^{2i\vartheta}-s_n^2}{T^2e^{2i\vartheta'}-s_n^2}\right| d\vartheta;$$

es genügt nun zu bemerken, daß $u_n = O\left(\frac{1}{T}\right)$ für $|\tau_n - T|\leqq 1$, um aus den Rechnungen der S. 132 unsere Formel (3) abzulesen.

(Eingegangen am 14. Dezember 1924.)

Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen.

Von

W. Krull in Freiburg i. Br.

In der vorliegenden Arbeit soll eine für die formale Theorie der erentialausdrücke, sowie für die Theorie der Matrizengruppen wichtige llgemeinerung des Begriffs der Abelschen Gruppe behandelt werden, er wir auf naturgemäße Weise folgendermaßen gelangen:

Es sei G eine Abelsche Gruppe, dann ist die zwischen ihren Ele-ten bestehende Verknüpfungsart nicht nur assoziativ, sondern auch mutativ, und kann daher entgegen dem üblichen Gebrauch als „Ad-n" anstatt als „Multiplikation" bezeichnet werden. Ist nun α ein biges Element aus G, so enthält G infolge der Gruppeneigenschaft neben ne „natürlichen Vielfachen" $2\cdot\alpha = \alpha + \alpha$, $3\cdot\alpha = \alpha + \alpha + \alpha$, usw. Die en Zahlen spielen also bei den Abelschen Gruppen die Rolle von atoren, mit deren Hilfe wir aus einem beliebigen gegebenen Element Gruppenelemente herleiten können, und zwar sind diese Operatoren ibutiv, d. h. es ist für jede natürliche Zahl n stets $n\cdot(\alpha+\beta) = n\cdot\alpha + n\cdot\beta$.

Die verallgemeinerten Abelschen Gruppen (in Zukunft kurz v. A. G.), denen wir uns im folgenden beschäftigen wollen, entstehen nun aus gewöhnlichen einfach dadurch, daß wir neben den infolge der Gruppen-schaft auftretenden ganzen Zahlen noch weitere distributive Opera-Θ aus einem im übrigen völlig willkürlichen Operatorenbereich O sen, und ein Elementesystem nur dann als Gruppe bezeichnen, wenn icht nur hinsichtlich der Addition Gruppeneigenschaft besitzt, sondern gleichzeitig mit einem Element α stets jedes Element $\Theta\cdot\alpha$ für be-ges Θ aus O enthält. — Bei dieser neuen Gruppendefinition kann man Begriffe der Untergruppe, Vereinigungsgruppe, des Durchschnitts zweier pen usw., genau so einführen wie bei den gewöhnlichen Abelschen pen. Es handelt sich nun vor allem um die Verallgemeinerung des iffs der *endlichen* Abelschen Gruppen, die wir so gewinnen: Man

kann eine endliche Abelsche Gruppe nicht nur als Abelsche Gruppe mit endlich viel Elementen, sondern auch folgendermaßen charakterisieren: *Eine Abelsche Gruppe heißt endlich, wenn man aus ihr keine ins Unendliche laufende Gruppenkette G_1, G_2, ... entnehmen kann, bei der allgemein G_i eine echte Unter- bzw. Obergruppe von G_{i-1} ist* (d. h. aus G_{i-1} durch Weglassen bzw. Zufügen mindestens eines Elementes entsteht). *In genau der gleichen Weise definieren wir jetzt die verallgemeinerten endlichen Abelschen Gruppen (in Zukunft v. e. A. G.), nur daß an Stelle des Wortes „Abelsche Gruppe" „v. A. G." zu setzen ist.*

Wir gelangen so zu einer Klasse von Bereichen, der neben den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen vor allem die „vollständig reduziblen v. A. G." und die „v. A. G. von endlichem Rang" angehören. Die vollständig reduziblen v. A. G. sind von der Theorie der Differentialausdrücke und der Matrizenkomplexe her (unter anderm Namen) in der Literatur wohl bekannt[1]), auch sind die grundlegenden Sätze über ihren Aufbau bewiesen. Wir gehen daher in der vorliegenden Arbeit nur kurz auf sie ein, einerseits um die bisher bekannten Resultate noch etwas zu verallgemeinern, andererseits um zu zeigen, daß sie sich wirklich der von uns gegebenen Definition der v. e. A.. G. unterordnen.

Die v. A. G. von endlichem Rang, die die allgemeinsten in der Theorie der gewöhnlichen Differentialausdrücke vorkommenden v. A. G. sind, sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Elemente sich als Linearformen in endlich viel Elementen α_1, α_2, ..., α_n mit Koeffizienten aus einem gegebenen Körper $\mathfrak{K}$ darstellen lassen. In formaler Hinsicht weisen die v. A. G. von endlichem Rang vielfach besonders weitgehende Ähnlichkeiten mit den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen auf, doch ergeben sich beim tieferen Eindringen in ihren Aufbau im wesentlichen dieselben Schwierigkeiten wie bei den allgemeinsten v. e. A. G.

Bei einer näheren Untersuchung der v. e. A. G. lassen wir uns von der Analogie mit den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen leiten. Die grundlegenden Sätze lauten dort in der gewöhnlichen Terminologie: *„Die Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind die einzigen unzerlegbaren, d. h. nicht als direktes Produkt echter Untergruppen darstellbaren Gruppen,"* und: *„Jede endliche Abelsche Gruppe läßt sich bis auf Isomorphie eindeutig als direktes Produkt unzerlegbarer Gruppen darstellen."* Das erste dieser beiden Theoreme läßt sich auf die v. e. A. G. nicht übertragen, wir kommen im allgemeinen Fall zu keiner einfachen Charakterisierung der unzerlegbaren v. e. A. G. Hingegen ist es möglich, das zweite Theorem

[1]) Vgl. z. B. A. Loewy, Über vollständig reduzible Differentialgleichungen. Math. Ann. 62 (1906), S. 89–117, sowie die in Anmerkung [30]) bei § 7 angeführte Literatur.

die v. e. A. G. auszudehnen, wir können also, wenn wir unserer Benungsweise gemäß von „direkter Summe" statt von „direktem Pro-" reden, den Satz beweisen: *Jede v. e. A. G. läßt sich bis auf Isohie eindeutig als direkte Summe unzerlegbarer Gruppen darstellen.* Auch ist es möglich, für die absolute Eindeutigkeit dieser Darstellung endige und hinreichende Kennzeichen zu gewinnen. Die Beweise sind htlich umständlicher als bei den gewöhnlichen Abelschen Gruppen, einfach aus der oben hervorgehobenen Tatsache folgt, daß wir bei den A. G. infolge der Willkürlichkeit des Operatorenbereichs über die bere Natur der unzerlegbaren Gruppen sehr wenig Bescheid wissen.

Zum Ausgleich dieses Mißstandes müssen die Schlußweisen, die man Beweis der Remakschen Sätze[2]) über die direkte Produktzerlegung kommutativer Gruppen anwendet, in weitgehendem Maße herangezogen en, doch gelingt auch damit allein der Beweis nicht, weil wir den den nichtkommutativen Gruppen wesentlichen Begriff des Zentrums auf unsern Fall übertragen können. Wir müssen zum Ersatz dafür neues Hilfsmittel den neuen Begriff der Zurückleitungsgruppe einführen, h dessen Vermittlung wir dann endlich den gewünschten Einblick in Aufbau einer beliebigen v. e. A. G. aus ihren unzerlegbaren Kompoen gewinnen.

Die bisher geschilderten Entwicklungen bilden den Inhalt der ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit: In § 1 werden die v. A. G., 2 die v. e. A. G. eingeführt, während § 3 den vollständig reduziblen G., § 4 den v. A. G. von endlichem Rang gewidmet ist. In § 5 wird Theorie der Zurückleitungsgruppen entwickelt, und in § 6 wird schließder Fundamentalsatz samt seinen Folgerungen bewiesen.

Die beiden letzten Paragraphen bringen Anwendungen der gewonnenen bnisse auf die Theorie der Differentialausdrücke, sowie der Matrizenplexe.

Mit jedem linearen Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung mit unabhängigen Veränderlichen und mit Koeffizienten aus einem genen Funktionenkörper ist eine v. A. G. vom endlichen Range n verft, und es gelten die Sätze: Zwei Differentialgleichungssysteme sind und nur dann von derselben Art, wenn ihre zugeordneten Gruppen orph sind. Ein Differentialgleichungssystem ist dann und nur dann gbar, d. h. als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches total teilerfremder rentialgleichungssysteme darstellbar, wenn die zugeordnete Gruppe gbar ist. Auf Grund dieser beiden Sätze gelangen wir durch Andung des Fundamentalsatzes der v. e. A. G. zu dem Theorem:

[2]) Vgl. z. B.: R. Remak, Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte legbare Faktoren, Journ. für Math. 137 (1911), S. 293–308.

Sieht man Differentialgleichungssysteme der gleichen Art als nicht verschieden an, so ist die Darstellung eines Differentialgleichungssystems als kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachens total teilerfremder unzerlegbarer Systeme eindeutig bestimmt.

Hiermit ist für Differentialgleichungssysteme ein neuer Zerlegungssatz bewiesen, der neben die Loewyschen Sätze[3]) über den Aufbau eines Differentialgleichungssystems aus seinen irreduziblen bzw. vorderen oder hinteren größten vollständig reduziblen Bestandteilen zu stellen ist. Dabei kann das Verhältnis des hier neu gewonnenen Ergebnisses zu den Loewyschen Resultaten am besten durch folgende Analogie klargemacht werden:

Der im Texte bewiesene Fundamentalsatz entspricht dem Remakschen Satz über die direkte Produktzerlegung gewöhnlicher endlicher Gruppen, während die Loewyschen Sätze in der Theorie der gewöhnlichen endlichen Gruppen den Jordan-Hölderschen Satz, sowie weitere Ergebnisse über den Aufbau einer Gruppe mit Hilfe gewisser ausgezeichneter Kompositionsreihen liefern würden. — Daß übrigens auch die Loewyschen Sätze mit Hilfe der Theorie der v. A. G. in zum Teil recht einfacher Weise bewiesen werden können, gedenkt der Verfasser gelegentlich an anderer Stelle darzulegen.

Statt auf ein System mit n abhängigen Veränderlichen kann man die Theorie der v. A. G. in ganz entsprechender Weise auf eine einzige Differentialgleichung n-ter Ordnung anwenden, man kann auch Systeme linearer partieller Differentialgleichungen[4]) in Betracht ziehen, nur muß man sich dann ausdrücklich auf solche Systeme beschränken, denen sich v. e. A. G. zuordnen lassen, da bei partiellen Differentialgleichungen eine solche Zuordnung im allgemeinen nicht immer möglich sein wird.

Die Anwendung unserer Ergebnisse auf die Theorie der Matrizenkomplexe ergibt sich folgendermaßen: Jeder Matrix läßt sich eine v. e. A. G. von endlichem Rang zuordnen, und einem Matrizenkomplex entspricht auf diese Weise ein Gruppenkomplex. *Es zeigt sich nun, daß auf Gruppenkomplexe die Begriffsbildungen und folglich auch die Ergebnisse der ersten sechs Paragraphen unmittelbar übertragen werden können.* Man kann daher in Anbetracht des Zusammenhangs zwischen Matrizenkomplexen und Gruppenkomplexen sofort den folgenden Satz aussprechen:

Sieht man ineinander transformierbare Matrizenkomplexe als nicht verschieden an, so kann man jeden Matrizenkomplex (insbesondere jeden

[3]) Vgl. A. Loewy, Über Matrizen- und Differentialkomplexe I, II, III. Math. Ann. 78 (1917), S. 1–54 bzw. 343–368.

[4]) Über die Möglichkeit dieser Ausdehnung vgl. insbesondere die in Anmerkung [3]) bei § 6 nochmals ausführlich besprochene Noether-Schmeidlersche Arbeit: „Moduln in nichtkommutativen Bereichen."

ähnliche) Gruppe von Matrizen) in eine eindeutig bestimmte Kette legbarer Komplexe transformieren.

Über die Einordnung dieses Ergebnisses unter die bisher bekannten ist im wesentlichen dasselbe zu sagen, was oben bei den Differentialungssystemen bemerkt wurde.

§ 1.

Definition der verallgemeinerten Abelschen Gruppen.

In diesem Paragraphen soll genau auseinandergesetzt werden, was wir folgenden unter „verallgemeinerten Abelschen Gruppen" (v. A. G.) ehen, und es sollen einige in der gewöhnlichen Gruppentheorie üb- Definitionen und Sätze auf diese Bereiche übertragen werden.

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ein System von Elementen, die durch eine gewisse iative und kommutative Operation (in Zukunft „Addition" genannt entsprechend bezeichnet)[5]) miteinander verknüpft werden können. erdem möge ein gewisser Operatorenbereich O mit den Elementen $\Theta_2, \ldots$ vorgelegt sein, derart, daß durch Anwendung jedes Operatorentes Θ aus einem beliebigen Element α ein eindeutig bestimmtes ment $\Theta \cdot \alpha = \alpha'$ abgeleitet werden kann[6]). *Die einzige wesentliche ussetzung, die wir über die Natur von O machen, ist die, daß die ratoren Θ sämtlich distributiv sind, daß also für beliebiges Θ und für bege Elemente α_1 und α_2 stets die Gleichung* $\Theta \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = \Theta \cdot \alpha_1 + \Theta \cdot \alpha_2$

Wir nennen jetzt das System G eine v. A. G., wenn es folgenden beiden ingungen genügt:

I. *G besitzt hinsichtlich der Addition die Gruppeneigenschaft, d. h. st gleichzeitig mit α_1 und α_2 stets auch $\alpha_1 + \alpha_2$ in G enthalten; es iert das Einheitselement* 0, *das für beliebiges α der Gleichung* $\alpha + 0 = \alpha$

[5]) Gewöhnlich ist in der Gruppentheorie die Multiplikation als Verknüpfungsüblich, obwohl bei den kommutativen Gruppen gegen Verwendung der Bezeich- „Addition" nichts einzuwenden sein dürfte. Hier mußte mit Rücksicht auf Folgende unbedingt von „Addition" gesprochen werden. Der Verfasser dachte daran, statt von einer „Gruppe" von einem „Modul" zu reden, was vor allem Rücksicht auf die Anwendungen von § 7 nahelag. Doch hätte eine derartige ichnungsweise an verschiedenen Stellen mit der sonst in der Literatur üblichen inologie zu Unstimmigkeiten geführt. Es dürfte daher die oben gewählte Ausweise vor allem angesichts des später öfter zu betonenden, sehr engen Zuenhangs mit der gewöhnlichen Gruppentheorie wohl am vorteilhaftesten sein.

[6]) Auch in der Theorie der gewöhnlichen Abelschen Gruppen (g. A. G.) kommen ibutive Operatoren vor, nämlich die bereits in der Einleitung erwähnten ganzen rlichen Zahlen.

genügt, und es gibt zu jedem Element α das durch die Gleichung $\alpha + (-\alpha) = 0$ gekennzeichnete „inverse" Element $-\alpha$.

II. *G ist hinsichtlich O abgeschlossen, d. h. es gehört für beliebiges Θ aus O und beliebiges α aus G stets das Element $\Theta \cdot \alpha$ dem System G an.*

Ein Teilbereich G_1 von G, der ebenfalls den Axiomen I und II genügt, heißt Untergruppe von G, und zwar echte Untergruppe, wenn er von G verschieden ist. In jeder Untergruppe von G ist die aus dem einzigen Element 0 bestehende Untergruppe enthalten.

Sind endlich viele Gruppen[7]) *$G_1, G_2, \ldots, G_n$ vorgelegt, so verstehen wir unter ihrer Summe $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ die Gesamtheit aller Elemente von der Form $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, wobei α_i ein beliebiges Element aus G_i bedeutet, unter ihrem Durchschnitt $[G_1, G_2, \ldots, G_n]$ die Gesamtheit aller sowohl in G_1 als in $G_2, \ldots,$ als in G_n enthaltenen Elemente.* Summe und Durchschnitt sind selbst Gruppen, sie genügen also insbesondere, wie aus der Distributivität der Operatoren folgt, dem Axiom II.

Zwei Gruppen, deren Durchschnitt aus dem einzigen Elemente 0 besteht, heißen elementefremd. In diesem Falle bezeichnen wir die Summe von G_1 und G_2 als „direkte Summe" und schreiben $G = ((G_1, G_2))$. — In entsprechender Weise reden wir von der direkten Summe $((G_1, G_2, \ldots, G_n))$ der n Gruppen, $G_1, G_2, \ldots, G_n$, wenn jede der Gruppen G_i zur Summe der $n-1$ übrigen elementefremd ist. Eine Gruppe heißt zerlegbar, wenn sie sich als direkte Summe von echten Untergruppen darstellen läßt, im andern Falle nennen wir sie unzerlegbar[8]).

Ist $G = ((G_1, \ldots, G_n))$ und bedeutet $\bar{G}$ eine beliebige Untergruppe von G, so gilt für jedes Element α aus $\bar{G}$ eine Darstellung $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, wobei α_i ein, wie aus der Definition der Elementefremdheit unmittelbar folgt, eindeutig bestimmtes Element aus G_i darstellt. α_i soll als die G_i-Komponente von α (hinsichtlich der Darstellung $G = ((G_1, \ldots, G_n))$) bezeichnet werden. Ist $\alpha^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)}$, $\alpha^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(2)}$, so haben wir

$$\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}); \quad \Theta \cdot \alpha^{(1)} = \Theta \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \Theta \cdot \alpha_i^{(1)}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt unmittelbar:

Die Gesamtheit derjenigen Elemente aus G_i, die die G_i-Komponenten eines Elementes aus $\bar{G}$ darstellen, bilden eine Untergruppe $G_i^{(\bar{G})}$ von G_i

[7]) Unter „Gruppe" verstehen wir im folgenden immer eine v. A. G. Eine Gruppe im üblichen Sinn bezeichnen wir zur Unterscheidung stets als „gewöhnliche Gruppe".

[8]) Setzt man „Produkt" an Stelle von „Summe", „Einheit" an Stelle von „Null", so erhält man bekannte Definitionen aus der Theorie der g. A. G.

e Untergruppe soll als die G_i-Komponente von $\bar{G}$ (hinsichtlich der tellung $((G_1, G_2, \ldots, G_n))$) bezeichnet werden.

Es gilt nun folgender auch in der Theorie der g. A. G., sowie bei nichtkommutativen endlichen Gruppen wichtiger Satz[9]):

Satz 1. *Ist $G = ((G_1, G_2))$ und dedeutet $\bar{G}$ eine beliebige, zu G_2 entefremde Untergruppe von G, so ist $\bar{G}$ zu seiner G_1-Komponente orph.*

Dabei ist der Isomorphismus für unsere v. A. G. sinngemäß so zu defi-n: Zwei Gruppen G und G' heißen isomorph, wenn zwischen n Elementen eine derartige eineindeutige Zuordnung besteht, gleichzeitig mit den Elementen α_1 und α_1', α_2 und α_2' stets die mente $\alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_1' + \alpha_2'$, $\Theta \cdot \alpha_1$ und $\Theta \cdot \alpha_1'$ einander zugeordnet . Zum Beweise von Satz 1 ordnen wir jedem Elemente α aus $\bar{G}$ seine omponente $\alpha^{(1)}$ zu. Diese Zuordnung ist, wie aus einer oben gemachten erkung folgt, jedenfalls derart, daß $\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}$ und $\alpha_1 + \alpha_2$, sowie $_1^{(1)}$ und $\Theta \cdot \alpha_1$ einander zugeordnet sind, wenn das gleiche von $\alpha_i^{(1)}$ und $= 1, 2)$ gilt. Es ist also nur noch zu zeigen, daß die hergestellte dnung eineindeutig ist, und zu diesem Zwecke genügt der Nachweis, die Nullelemente von G und $G_1^{(\bar{G})}$ eineindeutig aufeinander bezogen Das ist aber in der Tat der Fall, denn aus $0 = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$ folgt $= 0$, und umgekehrt ergibt sich aus $\alpha = 0 + \alpha^{(2)}$ für jedes in $\bar{G}$ ent-ene Element α die Gleichung $\alpha = 0$, weil $\bar{G}$ und G_2 nach Voraus-ung elementefremd sein sollen. Satz 1 ist hiermit bewiesen.

Es soll jetzt weiter der Begriff der Restklassengruppe eingeführt len, dem bei den gewöhnlichen A. G. der Begriff der Faktor- oder tientengruppe entspricht. Es sei G eine beliebige Gruppe, G_1 eine Untergruppen. *Dann nennen wir zwei Elemente α_1 und α_2 aus G odulo G_1 kongruent" und schreiben $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (G_1)$, wenn die Differenz α_2 in G_1 enthalten ist.* ($\alpha \equiv 0 (G_1)$ bedeutet also insbesondere, daß Element α der Gruppe G_1 angehört.)

Der Begriff der Kongruenz ist, wie unmittelbar zu sehen, symmetrisch, xiv und transitiv, er befriedigt also alle Forderungen, die man an Gleichheitsdefinition stellt. Ferner folgt aus $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (G_1)$; $\beta_1 \equiv \beta_2 (G_1)$ $\alpha_1 + \beta_1 \equiv \alpha_2 + \beta_2 (G_1)$ und schließlich zieht, wie aus der Distribu-ät der Operatoren folgt, die Kongruenz $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (G_1)$ stets die Kon-nz $\Theta \cdot \alpha_1 \equiv \Theta \cdot \alpha_2 (G_1)$ nach sich.

Wir können daher die Klassen modulo G_1 kongruenter Elemente als

[9]) Vgl. R. Remak, Journ. für Math. **139** (1911), S. 297, Satz 3. F. Levi, Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen. Leipzig, B. G. Teubner (1917), .

einen neuen Bereich betrachten, in dem Addition und Multiplikation m Operatoren folgendermaßen erklärt sind: Zwei Klassen werden addier bzw. eine Klasse wird mit einem Operator multipliziert, indem man zwe beliebige ihrer Vertreter addiert, bzw. einen beliebigen Vertreter mit der Operator multipliziert, und die durch das erhaltene Element dargestellte eindeutig bestimmte Klasse als das Endergebnis der Operation ansieht

Bei diesen Festsetzungen erfüllt das System der Klassen modulo G *kongruenter Elemente, oder, wie wir in Zukunft sagen wollen, das Syste der „Restklassen modulo G_1", die Bedingungen* I *und* II, *es stellt als eine Gruppe dar, die, wie bereits angekündigt, als „Restklassengrupp von G nach G_1", oder symbolisch mit $G|G_1$, bezeichnet werden soll.*

Mit Hilfe des Begriffes der Restklassengruppe können wir dem Satz eine etwas allgemeinere Fassung geben, von der wir später öfters Gebrauc machen werden. Wir können nämlich sagen: *Ist*

$$G = ((G_1, G_2, \ldots, G_r)) = ((G_1, \bar{G}_1)) \qquad (\bar{G}_1 = ((G_2, \ldots, G_r))),$$

und ist G' eine beliebige Untergruppe von G, so ist die G_1-Komponen von G' mit der Gruppe $G'|([G', \bar{G}_1])$ isomorph. In der Tat, setzen w der Kürze halber für eine beliebige Untergruppe A von G : $A|[G', \bar{G}_1] = A$ so haben wir $G^* = ((G_1^*, G_2^*, \ldots, G_r^*)) = ((G_1^*, \bar{G}_1^*))$ und es wird $G_1'^*$ d G_1^*-Komponente von G'^*, falls G_1' die G_1-Komponente von G' bedeute Weil nun die Gruppen $\bar{G}_1^*$ und G'^* evidenterweise elementefremd sin da ja nach dem Durchschnitt von G' und $\bar{G}_1$ die Restklassengruppe g bildet wurde, so läßt sich Satz 1 anwenden, und es ergibt sich die Is morphie von G'^* und $G_1'^*$. Die Gruppe $G_1'^*$ ist aber zu G_1' isomorp wie man unmittelbar erkennt, wenn man jedem Element aus G_1' die dur es bestimmte Klasse in der Gruppe $G_1'^*$ zuordnet, und dabei beachte daß die Gruppen G_1 und $\bar{G}_1$ und folglich auch die Gruppen G_1' und $[G', \bar{G}$ elementefremd sind. Aus der Transitivität des Isomorphiebegriffs ergi sich mithin, daß die G_1-Komponente von G', G_1', zu der Restklassengrup von G' nach $[G', \bar{G}_1]$ isomorph ist, und das war ja die zu beweisen Behauptung.

Zum Schluß dieses Paragraphen führen wir noch einige Bezeichnung ein, die vor allem in § 2 von Nutzen sein werden. — Unter einer „Re klassengruppe von G" ohne weiteren Zusatz wollen wir die Restklass gruppe nach einer beliebigen Untergruppe G_1 verstehen, und zwar red wir insbesondere von einer „echten Restklassengruppe", falls G_1 von Nullgruppe verschieden ist.

Es sei ferner G_1 eine Untergruppe von G, H_1 eine solche von $G|$ Dann erhalten wir eine weitere Untergruppe von G, wenn wir zu d Elementen von G_1 ein Repräsentantensystem der Gruppe H_1 und fer

lle linearen Verbindungen dieser Repräsentanten mit den Elementen von $_1$ hinzufügen. Die so konstruierte Untergruppe soll mit $G_1 \cap H_1$ bezeichnet werden. Entsprechend wollen wir unter $G_1 \cap H_1 \cap H_2$ diejenige ruppe verstehen, die wir erhalten, wenn wir aus $G \mid (G_1 \cap H_1)$ eine Unterruppe H_2 herausgreifen und dann nach dem eben auseinandergesetzten chema $(G_1 \cap H_1) \cap H_2$ bilden. Das Weglassen der Klammer ist berechtigt, eil wir zur selben Gruppe gelangen, wenn wir aus $G \mid G_1$ die Gruppe $_1 \cap H_2$ herausgreifen und dann zu $G_1 \cap (H_1 \cap H_2)$ übergehen.

Auf Grund der eben aufgestellten Bezeichnungsweise können wir von $_1 \cap H_1 \cap H_2$ ausgehend weiter eine auch ohne Klammer eindeutig bestimmte Gruppe $G_1 \cap H_1 \cap H_2 \cap H_3$ aufbauen usw. Die hiermit eingeführte ezeichnungsweise wird vor allem zur glatten Darstellung einiger Beweise on § 2 nützlich sein.

§ 2.

V. e. A. G.

Um diejenigen v. A. G. zu charakterisieren, die sinnvollerweise als erallgemeinerung der *endlichen* Abelschen Gruppen angesehen werden önnen, führen wir folgende Bezeichnungsweise ein: *Unter einer der ruppe G entnommenen echten Untergruppenkette* (*Obergruppenkette*) *erstehen wir eine Folge von Gruppen $G_1, G_2, \ldots$, die sämtlich Unterruppen von G sind, und bei denen außerdem allgemein G_i eine echte ntergruppe* (*Obergruppe*) *von G_{i-1} darstellt. Wir definieren dann:*

Eine v. A. G. heißt verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppe (v. e. A. G.), wenn sie keine ins Unendliche laufende Unter- oder Oberruppenkette enthält.

Satz 2. *Eine v. e. A. G. ist zu keiner Restklassengruppe einer echten Untergruppe isomorph.*

Wir zeigen einfach, daß jede Gruppe, die zu einer Restklassengruppe einer echten Untergruppe isomorph ist, eine ins Unendliche laufende echte Untergruppenkette enthält. Es sei nämlich G_1 die in Betracht kommende echte Untergruppe von G, und es sei H_1 diejenige Untergruppe von G_1, für die $G_1 \mid H_1 = J_1$ zu G isomorph wird. Bilden wir alsdann G isomorph auf J_1 ab, so entspricht dabei der Gruppe G_1 eine echte Untergruppe G_2 von J_1, und es enthält G_2 eine Untergruppe H_2, derart, daß $G_2 \mid H_2 = J_2$ zu G isomorph wird. Als erste Glieder der zu konstruierenden Untergruppenkette wählen wir jetzt $U_1 = G_1, U_2 = H_1 \cap G_2$. U_2 ist eine Untergruppe von U_1, da ja G_2 eine solche von $G_1 \mid H_1$ ist. Um das dritte Glied der Untergruppenkette zu gewinnen, bilden wir G isomorph auf J_2 ab. Dabei entspricht G_1 eine echte Untergruppe G_3 von J_2 und H_1 eine

Untergruppe von H_3 von G_3, und es wird $G_3 \mid H_3 = J_3$ zu G isomorph
Setzen wir jetzt $U_3 = H_1 \cap H_2 \cap G_3$, so wird U_3 eine echte Untergrupp
von U_2, weil G_3 eine echte Untergruppe von $G_2 \mid H_2$ und folglich $H_2 \cap G$
eine solche von G_2 ist. Indem wir jetzt von dem zwischen J_3 und
bestehenden Isomorphismus aus weiter schließen, konstruieren wir Glie
für Glied die gesuchte Untergruppenkette und gelangen so zum Beweis
unseres Satzes.

Satz 3. *Eine v. e. A. G. ist zu keiner Untergruppe einer echte
Restklassengruppe isomorph.*

Ähnlich wie wir bei Satz 2 eine Untergruppenkette aufbauten, kon
struieren wir diesmal zu jeder der Bedingung von Satz 3 nicht genügende
Gruppe eine in ihr enthaltene unendliche echte Obergruppenkette. Es se
G_1 eine von der Nullgruppe verschiedene Untergruppe, derart, daß G z
einer Untergruppe J_1 von $G \mid G_1$ isomorph wird. Bilden wir alsdann
isomorph auf J_1 ab, so entspricht der Gruppe G_1 eine von Null ve
schiedene Untergruppe G_2 von J_1, und es wird G zu einer Untergrupp
J_2 von $J_1 \mid G_2$ isomorph. Als Anfangsglieder der zu konstruierenden Obe
gruppenkette wählen wir jetzt $O_1 = G_1$, $O_2 = G_1 \cap G_2$. Es ist dann O_2 echt
Obergruppe von O_1, weil G_2 zu G isomorph und folglich von Null verschied
ist. Wir bilden nun weiter G isomorph auf J_2 ab. Dabei entspricht d
Gruppe G_1 eine von Null verschiedene Untergruppe G_3 von J_2 und es i
G zu einer Untergruppe J_3 von $J_2 \mid G_3$ isomorph. Setzen wir nu
$O_3 = G_1 \cap G_2 \cap G_3$, so wird O_3 eine echte Obergruppe von O_2. Man sieh
es läßt sich tatsächlich auf Grund des Isomorphismus von G_1 und J_1 ein
in G enthaltene unendliche echte Obergruppenkette konstruieren, Satz
ist also richtig. Wir bemerken noch:

*Ist G eine v. e. A. G., so ist auch jede Unter- und jede Restklasse
gruppe von G eine v. e. A. G.*

Für die Untergruppen ist die Behauptung klar, für die Restklasse
gruppen folgt sie aus der Tatsache, daß $H \cap G_1$, $H \cap G_2 \ldots$ eine ech
Unter- oder Obergruppenkette aus G darstellt, falls $G_1, G_2, \ldots$ eine solc
aus $G \mid H$ ist.

Satz 4. *Jede v. e. A. G. läßt sich als direkte Summe endlich vie
unzerlegbarer Summanden darstellen.*

Zum Beweise unseres Satzes zeigen wir, daß sich aus jeder Grupp
für die eine derartige Darstellung nicht besteht, eine unendliche ech
Untergruppenkette herausgreifen läßt.

In der Tat, ist A eine solche Gruppe, so ist A sicher zerlegbar,
gilt also eine Gleichung $A = ((A_1, A_2))$, wobei A_1 und A_2 echte Unt
gruppen von A sind. Wären nun A_1 und A_2 beide als direkte Sum

ndlich vieler unzerlegbarer Summanden darstellbar, so gälte das gleiche on A. Es darf daher angenommen werden, daß A_1 keine derartige ummendarstellung zuläßt, und daß mithin sicher eine Gleichung $_1 = ((A_{11}, A_{12}))$ besteht, wobei A_{11} und A_{12} echte Untergruppen von A ind, und wobei bei geeigneter Bezeichnung A_{11} keine direkte Summe ndlich vieler unzerlegbarer Summanden ist. Wir wählen nun A, A_1, A_{11} ls Anfangsglieder der zu bildenden Untergruppenkette, und setzen diese ette fort, indem wir auf A_{11} dieselbe Schlußweise anwenden, wie früher uf A und A_1. Bei dieser Methode des Weiterschreitens kommen wir ffenbar nie zum Ende, es kann also A keine v. e. A. G. sein, d. h. jede . e. A. G. stellt, wie behauptet, die direkte Summe endlich vieler unzeregbarer Summanden dar.

Eine solche Darstellung wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ein, wir werden aber den grundlegenden Satz beweisen:

Die Darstellung einer v. e. A. G. durch unzerlegbare Summanden ist is auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Ehe wir zum Beweise dieses Fundamentalsatzes übergehen, soll noch uf die beiden wichtigsten Typen von v. e. A. G. eingegangen werden, die ußer den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen in der Literatur orkommen, nämlich bis auf die vollständig reduziblen Gruppen und auf ie Gruppen vom endlichen Rang.

§ 3.

Vollständig reduzible v. A. G.

Gemäß dem in § 2 aufgestellten Programm wenden wir uns zunächst u den in der Literatur als „vollständig reduzibel" bezeichneten v. A. G. *Die charakteristische Eigenschaft dieser Gruppen liegt darin, daß sie sich ls direkte Summe von „irreduziblen Gruppen" darstellen lassen, d. h. on solchen Gruppen, die außer der Nullgruppe keine echte Untergruppe nthalten.* Um nachzuweisen, daß die vollständig reduziblen (in Zukunft urz v. red.) Gruppen tatsächlich zu den im vorangehenden Paragraphen ingeführten v. e. A. G. gehören, beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 5. *Ist $G = ((P_1, P_2, \ldots, P_r))$ eine beliebige v. red. Gruppe, G_1 ine ihrer Untergruppen, so ist G_1 ebenfalls v. red., wir haben mithin $G_1 = ((P_1', P_2', \ldots, P_s'))$, wobei die P_i' ebenso wie die P_i irreduzible Gruppen edeuten. Dabei ist $s \leqq r$ und man kann $r - s$ irreduzible Gruppen $P_{s+1}, \ldots, P_r'$ so bestimmen, daß $G = ((P_1', P_2', \ldots, P_r')) = ((P_1, P_2, \ldots, P_r))$ wird. Bei geeigneter Numerierung sind alsdann P_i und P_i' isomorph.*

Satz 5 kann auch kurz so formuliert werden: „Der (in § 2 formuierte) Fundamentalsatz ist für v. red. Gruppen gültig. Darüber hinaus

ist jede Untergruppe G_1 von G v. red. und es läßt sich eine direkte Summendarstellung von G finden, bei der G_1 als Komponente auftritt.' Wir führen den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion, wir nehmen also an, unser Satz sei für Gruppen mit höchstens $r-1$ unzerlegbaren Summanden bereits bewiesen — für irreduzible Gruppen ist er ja offenbar richtig — und zeigen dann seine Gültigkeit für Gruppen mit r unzerlegbaren Komponenten. Nehmen wir an, es sei die Numerierung so gewählt, daß G_1 zu der Gruppe $((P_1, P_2, \ldots, P_t)) = G'(t \leqq r)$ nicht elementefremd ist, während es mit allen den Gruppen, die aus G' durch Weglassen eines P_i entstehen, keine von 0 verschiedene Untergruppe gemein hat. Alsdann ist nach Satz 1 von § 1 die von 0 verschiedene Gruppe $[G', G_1] = P_1'$ zu ihrer P_1-Komponente (und entsprechend zu ihrer P_i-Komponente für $i = 2, 3, \ldots, t$) isomorph, und wegen der Irreduzibilität von P_1 ergibt sich daraus weiter, daß P_1 mit der P_1-Komponente von P_1' identisch sein muß. Aus dieser Tatsache folgt aber leicht die Gültigkeit der Gleichung $G = ((P_1', P_2, \ldots, P_r))$. Zunächst ist nämlich P_1' zu $((P_2, \ldots, P_r))$ elementefremd; denn andernfalls wäre bereits $[P_1', ((P_2, \ldots, P_t))] \neq 0$, da ja P_1' eine Untergruppe von G' darstellt, und daraus folgte weiter $[G_1, ((P_2, \ldots, P_t))] \neq 0$ entgegen unseren Voraussetzungen über die Bestimmung von G'.

Ferner muß $((P_1', P_2, \ldots, P_r))$ die ganze Gruppe P_1 enthalten. Ist nämlich α ein beliebiges Element aus P_1, so muß α die P_1-Komponente eines Elementes aus P_1' sein, d. h. es gibt in $((P_2, \ldots, P_t))$ ein Element γ, für das eine Kongruenz $\alpha + \gamma = \beta \equiv 0\ (P_1')$ gilt und daraus folgt sofort $\alpha = \beta - \gamma \equiv 0\ (((P_1', P_2, \ldots, P_r)))$. Aus der nunmehr vorbewiesenen Gleichung $G = ((P_1', P_2, \ldots, P_r))$ ergibt sich weiter $G_1 = ((P_1', G_1'))$ für $G_1' = [G_1, ((P_2, \ldots, P_r))]$.

Nunmehr ist uns der Ansatz zum Induktionsschluß gegeben: G_1' stellt eine Untergruppe der v. red. Gruppe $((P_2, \ldots, P_r))$ dar, und da diese Gruppe nur $r-1$ unzerlegbare Komponenten besitzt, so darf auf G_1' der Satz angewandt werden. Wir können mithin $G_1' = ((P_2', \ldots, P_s'))$ $(s \leqq r)$ setzen und dürfen annehmen, daß sich $r-s$ Gruppen $P_{s+1}', \ldots, P_r'$ so bestimmen lassen, daß die Gleichung $G' = ((P_2', P_3', \ldots, P_r'))$ besteht, wobei stets bei geeigneter Numerierung P_i und P_i' $(i = 2, 3, \ldots, r)$ isomorph ausfallen. Daraus folgt aber sofort die Richtigkeit von Satz 5 für die aus r Komponenten bestehende Gruppe G. Wir haben nämlich: $G_1 = ((P_1', P_2', \ldots, P_s'))$, $G = ((P_1, P_2, \ldots, P_r)) = ((P_1', P_2', \ldots, P_r'))$ und wegen des bereits bewiesenen Isomorphismus von P_1 und P_1' sind P_i und P_i' für jedes i isomorph.

Satz 5 gewährt uns einen vollen Überblick über den Aufbau ein

. red. Gruppe aus ihren unzerlegbaren Komponenten[10]). Insbesondere rgibt sich, daß jede Untergruppe einer v. red. Gruppe G, die ebensoviel nzerlegbare Komponenten wie G besitzt, mit G identisch sein muß, und a nach Satz 5 außerdem alle Untergruppen einer v. red. Gruppe gleichalls v. red. sind, so erkennen wir, daß jede einer v. red. Gruppe mit r Komonenten entnommene echte Unter- oder Obergruppenkette nach höchstens $+1$ Schritten abbrechen muß.

Die v. red. Gruppen gehören also tatsächlich zu den v. e. A. G. im Sinne von § 2.

Wir wenden uns nunmehr zu den Gruppen vom endlichen Rang, bei lenen man zwar die Zugehörigkeit zu den v. e. A. G. beinahe unmittelbar rkennen kann, bei denen aber der Beweis des Fundamentalsatzes weentlich größere Schwierigkeiten macht, als bei den bisher behandelten . red. Gruppen.

§ 4.

V. A. G. von endlichem Rang.

Während bisher über den Operatorenbereich keinerlei beschränkende Annahme gemacht wurde, wollen wir jetzt voraussetzen, *daß O aus einem Bereich O', der keinen weiteren Bedingungen unterworfen wird, und aus den Elementen eines Körpers $\mathfrak{K}$ besteht.* Dabei bedeutet ein Körper entsprechend der gebräuchlichen Ausdrucksweise ein System von Elementen $a_1, a_2, \ldots$, in dem Addition und Multiplikation in üblicher Weise erklärt sind, und in dem insbesondere die Umkehrungen dieser beiden Operationen, die Subtraktion und die Division, mit Ausnahme der Division durch 0, allgemein ausgeführt werden können[11]).

Die Operatoren von O' wollen wir wie in § 1 mit Θ, die Elemente von $\mathfrak{K}$ hingegen wollen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ Elemente einer Gruppe G, so wollen wir sie linear abhängig nennen, wenn eine Gleichung $a_1 \cdot \alpha_1 + a_2 \cdot \alpha_2 + \ldots + a_n \cdot \alpha_n = 0$ mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ besteht, wenn sich

---

[10]) Was das Verhältnis von Satz 5 zur bisher erschienenen Literatur angeht, so ist folgendes zu bemerken: Daß jede v. red. Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig als direkte Summe irreduzibler Gruppen darstellbar ist, war in anderer Ausdrucksweise schon lange bekannt. Vgl. z. B. A. Loewy, Math. Ann. 62 (1906), S. 116 oder Noether-Schmeidler, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 19 ff. Hingegen habe ich Satz 5 in seiner allgemeinen Fassung in der Literatur nirgends gefunden.

[11]) Man denke z. B. an den Körper der rationalen oder an den der reellen Zahlen, oder auch an einen Körper, der außer Konstanten noch Funktionen einer Variablen enthält.

also ein α_i linear durch die übrigen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ ausdrücken läßt; im andern Falle sollen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängig heißen.

Wir wollen nun sagen: *Die Gruppe G besitzt den endlichen Rang n, wenn es in G genau n, aber nicht mehr unabhängige Elemente gibt*[12]).

Besitzt G den Rang n und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängige Elemente aus G, läßt sich also jedes in G vorkommende Element in der Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \alpha_i$ darstellen, so nennen wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von G und schreiben $G = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Aus elementaren Determinantensätzen ergibt sich: Jede Basis von G geht aus einer fest gewählten durch eine lineare Transformation mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ und mit nicht verschwindender Determinante hervor.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \leqq n)$ linear unabhängige Elemente aus G, so lassen sich $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ stets so bestimmen, daß $G = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ wird.

Ist G_1 eine echte Untergruppe von G, so muß, wie unmittelbar einleuchtet, der Rang von G_1 niedriger sein als der von G. Daraus folgt sofort, daß im Bereich der Gruppen von endlichem Rang jede echte Unter- oder Obergruppenkette im Endlichen abbricht, *daß mithin die Gruppen von endlichem Rang zu den v. e. A. G. gehören.*

Es sollen nun noch einige Sätze abgeleitet werden, die den Zusammenhang zwischen den Gruppen von endlichem Rang und den endlichen Abelschen Gruppen in ein scharfes Licht setzen.

Satz 6. *Bezeichnet n_i den Rang von G_i $(i = 1, 2)$, d den Rang von $[G_1, G_2]$ und s denjenigen von (G_1, G_2), so ist $n_1 + n_2 = s + d$.*[13])

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ eine Basis von $[G_1, G_2]$. Dann kann man nach einer oben gemachten Bemerkung die Elemente $\alpha_{d+1}^{(i)}, \alpha_{d+2}^{(i)}, \ldots, \alpha_{n_i}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ so bestimmen, daß $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}^{(i)}, \ldots, \alpha_{n_i}^{(i)}$ eine Basis von G_i wird. Unter diesen Umständen stellt aber $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d, \alpha_{d+1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n_1}^{(1)}, \alpha_{d+1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{n_2}^{(2)}$ eine Basis linear unabhängiger Elemente von (G_1, G_2) dar, und daraus folgt, wie behauptet, $s = n_1 + n_2 - d$; $s + d = n_1 + n_2$.

Aus Satz 6 folgert man leicht: *Im Bereiche der Gruppen von endlichem Rang kann man die direkte Summe auch folgendermaßen definieren:*

---

[12]) Der nur aus dem Nullelement bestehenden „Nullgruppe" schreiben wir den Rang 0 zu.

[13]) Man erhält den entsprechenden Satz aus der Theorie der gewöhnlichen endlichen A. G., wenn man „Produkt" an Stelle von „Summe", $\cdot$ an Stelle von $+$, : an Stelle von $-$ setzt. Zwischen den Gruppen von endlichem Rang und den endlichen A. bestehen in mancher Hinsicht ähnliche Zusammenhänge wie zwischen der Galoischen Gruppe einer algebraischen Gleichung und der Picard-Vessiotschen Gruppe einer Differentialgleichung, oder wie zwischen dem Restklassensystem nach einem Ideal algebraischer Zahlen und dem nach einem Ideal algebraischer Funktionen.

ie Summe der n Gruppen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ heißt direkte Summe, wenn r Rang gleich der Summe der Rangzahlen der einzelnen Summanden ist.

Aus der eben gemachten Bemerkung ergibt sich mühelos, daß sich ne Gruppe von endlichem Rang stets als direkte Summe von endlich ielen (höchstens n) unzerlegbaren Summanden darstellen läßt. Um die ichtigkeit dieser Tatsache einzusehen, braucht man nur zu bedenken, daß de Gruppe vom Range 1 unzerlegbar ist. Im übrigen aber ergibt sich, ie schon öfters betont, bei den Gruppen von endlichem Rang für den eweis des Fundamentalsatzes keine wesentliche Erleichterung. Wir führen aher diesen Beweis in dem folgenden Paragraphen gleich für den aller-llgemeinsten Fall einer beliebigen v. e. A. G.

§ 5.

Theorie der Zurückleitungsgruppen.

Um uns die zum Beweise des Fundamentalsatzes nötigen Hilfsmittel u verschaffen, müssen wir zunächst den Fall ins Auge fassen, daß für ie gegebene Gruppe zwei Darstellungen $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ be-tehen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um folgende Frage: Wann t eine der bei zwei derartigen Darstellungen auftretenden Komponenten-ruppen — im folgenden wollen wir dabei insbesondere stets an die ruppe A denken — zerlegbar? Um für die Beantwortung dieser Frage in brauchbares Kennzeichen zu gewinnen, genügt nicht die abgesonderte Untersuchung der Gruppe A allein, sondern es muß die Tatsache aus-enützt werden, daß A als Komponentengruppe bei einer direkten Summen-arstellung von G auftritt, wir müssen infolgedessen unser Augenmerk unächst auf den Aufbau der Gruppe B, der Ergänzungsgruppe von A, ichten.

Zur übersichtlichen Darstellung soll in diesem Paragraphen ein für llemal unter α bzw. β bzw. γ bzw. δ ein beliebiges Element aus der ruppe A bzw. B bzw. C_1 bzw. C_2 verstanden werden, ferner bedeute η tets ein Element der Gruppe $[A, C_1]$, ϑ ein solches der Gruppe $[A, C_2]$. Vir führen nun für die Elemente von B (gleiches könnte natürlich auch ür die von A geschehen) den Begriff der *Zurückleitung* ein[14]).

Wegen des Bestehens der Gleichung $G = ((C_1, C_2))$ existiert für ein eliebiges Element β eine eindeutige Darstellung $\beta = \gamma + \delta$, und für das

[14]) Der Name Zurückleitung ist der Graßmannschen „Ausdehnungslehre" ent-ommen, trotzdem er dort eine andere Bedeutung hat als im Texte. Die Verwendung es Namens schien unbedenklich, da unsere Untersuchungen in keinerlei Zusammen-ang mit den Graßmannschen Entwicklungen stehen, da also eine Verwechslung icht zu befürchten ist.

Element γ haben wir infolge der Gleichung $G = ((A, B))$ eine eindeutig
Darstellung $\gamma = \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}$. *Das Element* $\beta^{(1)}$ *soll als die erste Zurück-
leitung des Elementes* β *hinsichtlich der Gruppe* C_1 *bezeichnet werden, ent-
sprechend verstehen wir unter der ersten Zurückleitung von* β *hinsichtlich* C
das durch die Gleichung $\delta = \alpha^{(1)'} + \beta^{(1)'}$ *eindeutig bestimmte Element* $\beta^{(1)'}$.[15]
Als zweite Zurückleitung von β *hinsichtlich* C_1 *bezeichnen wir die erste
Zurückleitung von* $\beta^{(1)}$ *hinsichtlich* C_1, *allgemein definieren wir die* n-*te
Zurückleitung als erste Zurückleitung der* $n-1$-*ten.*

Ist $\bar{B}$ eine beliebige Untergruppe von B, so stellt die Gesamthe
derjenigen Elemente aus B, die n-te Zurückleitung eines Elementes au
$\bar{B}$ hinsichtlich C_k $(k = 1, 2)$ sind, eine Untergruppe $\bar{B}_k^{(n)}$ von B dar[16]
die n-te Zurückleitung von $\bar{B}$ hinsichtlich C_k genannt werden sol
Wir richten unser Augenmerk insbesondere auf die Zurückleitunge
$B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots, B_2^{(1)}, B_2^{(2)}, \ldots$ von B und beweisen:

$B_k^{(n)}$ *ist eine (echte oder unechte) Untergruppe von* $B_k^{(n-1)}$ $(k = 1, 2$

In der Tat stellt jedes Element aus $B_k^{(n)}$ die $n-1$-te Zurückleitur
hinsichtlich C_k eines Elementes aus $B_k^{(1)}$ dar, und muß daher in $B_k^{(n-}$
enthalten sein. — Die Ketten $B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, \ldots$ $(k = 1, 2)$ müssen infol
der Definition der v. e. A. G. beide im Endlichen abbrechen, es mu
also für zwei endliche Zahlen m_1 und m_2 und für beliebiges s ste
$B_k^{(m_k+s)} = B_k^{(m_k)}$ $(k = 1, 2)$ sein. Um den Aufbau von $B_k^{(m_k)} = B_k$ näh
kennen zu lernen, führen wir zwei neue Untergruppen von B ein, d
„Endlichkeitsuntergruppen“ E_1 und E_2, die sich im Verlauf der Unte
suchung als die Restklassengruppen von B nach B_2 bzw. B_1 herausstell
werden.

E_k $(k = 1, 2)$ *besteht aus der Gesamtheit der Elemente, die hinsich
lich* C_k *nur endlich viele von Null verschiedene Zurückleitungen besitze*

Über den Aufbau von E_k ist folgendes zu bemerken: Bezeichnen w
mit $E_{k,i}$ die Untergruppe von B, die aus allen denjenigen Elementen b
steht, für die die i-te und folglich jede höhere Zurückleitung verschwind
so ist $E_{k,i}$ offenbar eine (echte oder unechte) Obergruppe von $E_{k,i-}$

---

[15]) Das Element $\beta^{(1)}$ und ebenso $\beta^{(1)'}$ hängt selbstverständlich nicht nur von
bzw. C_2, sondern auch von der Darstellung von G durch C_1 und C_2 ab, d. h. $\beta^{(1)}$ wür
sich im allgemeinen ändern, wenn wir an Stelle der Darstellung $G = ((C_1, C_2))$ e
neue Darstellung $G = ((C_1, C_2'))$ setzten. Gleichwohl scheint es nicht nötig, in
Bezeichnung auf diese Abhängigkeit hinzuweisen, da im Texte immer nur von ei
festen Darstellung $G = ((C_1, C_2))$ die Rede ist.

[16]) Die Gruppeneigenschaft von $\bar{B}_k^{(n)}$ wird mit Hilfe der Distributivität der Ope
toren nach dem üblichen Schema bewiesen. Ein ausführliches Eingehen darauf
wohl überflüssig.

ıd es stellt E_k die Vereinigungsgruppe der Gruppen $E_{k,i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ır. Da nun bei den v. e. A. G. jede Obergruppenkette im Endlichen abicht, so gibt es in diesem Falle stets zwei natürliche Zahlen m_1 und m_2,[17]) daß $E_{k,m_k} = E_{k,m_k+1} = \ldots = E_k$ wird. Aus dieser Tatsache folgt leicht, ıß bei den v. e. A. G. die Gruppe E_k auch definiert werden kann als *die ößte Untergruppe von B, die die Eigenschaft besitzt, daß eine ihrer urückleitungen hinsichtlich C_k verschwindet*[18]).

Für das Folgende ist noch eine weitere, nicht auf v. e. A. G. beschränkte efinition der Gruppen $E_{k,i}$ wesentlich. *Wir setzen $E_{1,0} = E_{2,0} = (0)$ und efinieren dann allgemein $E_{k,i}$ als die Gesamtheit derjenigen Elemente us B, die die Eigenschaft besitzen, daß ihre C_k-Komponente in der ruppe $((A, E_{k,i-1}))$ enthalten ist*[19]).

Um die Übereinstimmung der beiden Definitionen etwa für $E_{1,i}$ einısehen, haben wir uns nur zu überlegen, daß für das Bestehen der Kongruenz $= \gamma + \delta \equiv 0\,(E_{1,i})$ die Richtigkeit der Kongruenz $\gamma \equiv 0\,((E_{1,i-1}, A))$ otwendig und hinreichend ist, falls man gemäß der ursprünglichen Definion unter $E_{k,i}$ $(i > 0)$ die Gesamtheit der Elemente mit verschwindender ter Zurückleitung, und der $E_{1,0}$ aber die Nullgruppe versteht. Das ist der Tat der Fall. Setzt man nämlich $\gamma = \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}$, so muß im Falle $+ \delta \equiv 0\,(E_{1,i})$ das Element $\beta^{(1)}$ eine verschwindende $i-1$-te Zurückitung besitzen und folglich der Gruppe $E_{1,i-1}$ angehören, während umekehrt aus der Kongruenz $\beta^{(1)} \equiv 0\,(E_{1,i-1})$ das Verschwinden der i-ten urückleitung von β und also die Kongruenz $\gamma + \delta \equiv 0\,(E_{1,i})$ folgt. Das ben gewonnene Resultat dient zum Beweise von

Satz 7. *Die Endlichkeitsuntergruppen sind elementefremd*[20]).

Da jedes Element aus E_k in einer der Gruppen $E_{k,i}$ vorkommt, so enügt zum Beweise von Satz 7 der Nachweis, daß für beliebiges i_1 und i_2 ie Gruppen E_{1,i_1} und E_{2,i_2} elementefremd sind. Die Richtigkeit dieser atsache wiederum kann in der Weise erhärtet werden, daß wir zeigen, aß aus der Elementefremdheit von E_{1,i_1} und E_{2,i_2} auch die Elementeemdheit von E_{1,i_1} und E_{2,i_2+1} (und entsprechend die von E_{1,i_1+1} und E_{2,i_2}) olgt; denn die Gruppen $E_{1,0}$ und $E_{2,0}$ sind ja gleich der Nullgruppe

[17]) Die Zahlen m_1 und m_2 sind, wie sich später zeigen wird, mit den bei Einührung von B_1 und B_2 früher erwähnten Zahlen m_1 und m_2 identisch.

[18]) Bei Gruppen mit unendlichem Rang wird im allgemeinen für E_k keine endhe Zurückleitung verschwinden, obwohl jede der Gruppen $E_{k,i}$ nur endlich viele on Null verschiedene Zurückleitungen besitzt

[19]) Von der hier gegebenen Definition der Gruppe E_k ging ich ursprünglich aus. *Die weiter oben gegebene auf dem Zurückleitungsbegriff beruhende Definition, mit deren Hilfe sich der Beweis wesentlich übersichtlicher gestaltet, verdanke ich E. Noether.*

[20]) Beim Beweise von Satz 7 wird die Voraussetzung des endlichen Ranges icht benutzt.

und daher sicher elementefremd. Es sei also $\gamma + \delta \equiv 0\,([E_{1,i_1}, E_{2,i_2+1}]$ $[E_{1,i_1}, E_{2,i_2}] = 0$. Dann existieren zwei Elemente $\beta_1 \equiv 0\,(E_{1,i-1})$ un $\beta_2 \equiv 0\,(E_{2,i-2})$, die den Kongruenzen $\gamma + \beta_1 \equiv \delta + \beta_2 \equiv 0\,(A)$ genüge wir haben mithin: $\gamma + \delta + \beta_1 + \beta_2 \equiv 0\,(A)$, und daraus folgt wegen d Elementefremdheit von A und B die Gleichung $\gamma + \delta + \beta_1 + \beta_2 =$ Wir haben mithin $\gamma + \delta + \beta_1 \equiv -\beta_2\,(E_{1,i_1})$ und daraus folgt wege $[E_{1,i_1}, E_{2,i_2}] = 0$ die Gleichung $\gamma + \delta + \beta_1 = 0$, also $\gamma + \delta \equiv -\beta_1\,(E_{1,i-1}$ Es gehört also $\gamma + \delta$ bereits der Gruppe $E_{1,i-1}$ an, und durch Fortsetzu des oben durchgeführten Schlußverfahrens beweisen wir die Gültigkeit d Gleichung $\gamma + \delta = 0$. Hiermit ist die Gleichung $[E_{1,i_1}, E_{2,i_2+1}] = 0$ u damit durch Induktion der Satz 7 bewiesen.

Satz 8. *Die l-te Zurückleitung von B hinsichtlich C_k, $B_k^{(l)}$, ist a Restklassengruppe $B \mid E_{k,l}$ isomorph*[21]).

Zum Beweise von Satz 8 ordnen wir jedem Elemente aus B sei l-te Zurückleitung zu. Auf diese Weise erhalten wir zwischen B und B eine Beziehung, die man in üblicher Ausdrucksweise einen „meroedrisch Isomorphismus" nennen kann, denn durch die angegebene Zuordnung e sprechen die Elemente $\beta_1 + \beta_2$ und $\beta_1' + \beta_2'$, $\Theta \cdot \beta$ und $\Theta \cdot \beta'$ einander, fa β_1 und β_1', β_2 und β_2', β und β' einander zugeordnet sind. Der einz Grund, warum wir nicht von einem gewöhnlichen (holoedrischen) I morphismus reden können, ist der, daß die Elemente von B und $B_k^{(l)}$, a insbesondere die Nullelemente, nicht eineindeutig aufeinander bezogen si Es entspricht zwar dem Nullelement aus B eindeutig das Nulleleme aus $B_k^{(l)}$, aber umgekehrt entspricht dem Nullelement aus $B_k^{(l)}$ die Gesa heit derjenigen Elemente, deren l-te Zurückleitung hinsichtlich C_k v schwindet, die also der Gruppe $E_{k,l}$ angehören. Die eben geschilderte der Zuordnung zwischen B und $B_k^{(l)}$ ist aber genau mit derjenigen id tisch, die man zwischen B und der Gruppe $B \mid E_{k,l}$ herstellen kann, d diese Restklassengruppe entsteht ja einfach dadurch aus B, daß man Elemente, deren l-te Zurückleitung verschwindet, dem Nullelement glei setzt. Die Gruppen $B_k^{(l)}$ und $B \mid E_{k,l}$ sind also in der Tat isomorph.

Nehmen wir wie oben an, daß $E_{k,1}, E_{k,2}, \ldots, E_{k,m_k}$ alle verschie sind, so fallen die Gruppen $B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, \ldots, B_k^{(m_k)} = B_k$ alle verschieden und B_k wird zu der Gruppe $B \mid E_k$ isomorph. B_k kann nun, we $E_k = E_{k,m_k}$, kein von Null verschiedenes Element mit einer verschwind den endlichen Zurückleitung enthalten und ist folglich zu E_k elemen fremd. Man kann daher ein Repräsentantensystem von $B \mid E_k$ so stimmen, daß es alle Elemente aus B_k enthält. Bei dieser Wahl stellt eine zu $B \mid E_k$ isomorphe Untergruppe von $B \mid E_k$ dar, und muß wegen

[21]) Satz 8 gilt ebenso wie Satz 7 für ganz beliebige v. A. G.

dlichkeit mit $B|E_k$ identisch sein, d. h. wir haben die Gleichung $= ((E_k, B_k))$. Mit Hilfe dieser wichtigen Beziehung beweisen wir weiter:

Satz 9. *Es existiert eine direkte Summenzerlegung* $B = ((E_1, E_2, U))$.

Zum Beweise unseres Satzes überzeugen wir uns zunächst davon, daß in B_1 (und entsprechend E_1 in B_2) enthalten ist, und weisen zu diesem recke nach, daß *die Zurückleitungsgruppe von* E_2 *nach* C_1 *mit* E_2 *iden-ch ist.* Wir nehmen an, es sei bereits gezeigt, daß $E_{2,i-1}$ mit seiner rückleitung hinsichtlich C_1 zusammenfällt, und zeigen dann, daß unter eser Annahme das gleiche für $E_{2,i}$ gilt. In der Tat, ist $\beta = \gamma + \delta \equiv 0\,(E_{2,i})$, gibt es ein $\beta_1 \equiv 0\,(E_{2,i-1})$, so daß $\delta + \beta_1 = \alpha \equiv 0\,(A)$ wird, wir haben o $\gamma = -\alpha + (\gamma + \delta) + \beta_1 = -\alpha + \beta^{(1)}$, $\beta^{(1)} = \beta + \beta_1 \equiv 0\,(E_2)$. Die rückleitung jedes Elementes aus E_2 hinsichtlich C_1 ist daher in E_2 ent-lten. Da ferner $\beta^{(1)}$ die Zurückleitung eines Elementes aus $E_{2,i}$ dar-llt, und da nach Voraussetzung wegen $\beta = 0\,(E_{2,i-1})$ dasselbe für β_1 lt, so stellt auch das beliebige Element $\gamma + \delta = \beta$ aus $E_{2,i}$ die Zurück-tung eines Elementes aus $E_{2,i}$ dar. Da nun $E_{2,0} = (0)$ evidenterweise it seiner Zurückleitung hinsichtlich C_1 zusammenfällt, so ist hiermit durch duktion gezeigt, daß das gleiche für jedes $E_{2,i}$ und folglich auch für gilt. E_2 tritt daher in jeder Zurückleitung von B nach C_1, insbesondere ch in B_1 auf.

Mit Hilfe des gewonnenen Ergebnisses ergibt sich nun leicht der Be-eis von Satz 9. Wir wollen die Elemente ξ so bestimmen, daß sie die ertreter der Gruppe $B_1|E_2$ werden, d. h. wir wollen aus jeder Klasse odulo E_2 kongruenter Elemente von B_1 genau einen Repräsentanten ξ erausgreifen. Dann besitzt das System S der ξ folgende Eigenschaften: S stellt nicht nur die Gruppe $B_1|E_2$, sondern auch die Gruppe $B\,|\,((E_1, E_2))$ ar. (Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung $B = ((E_1, B_1))$.) 2. Die sind modulo E_2 vollständig willkürlich, d. h. zu jedem ξ kann ein be-ebiges Element aus E_2 zugefügt werden. 3. Das System der ξ besitzt, ie selbstverständlich, modulo E_2 Gruppeneigenschaft. — Man kann nun den bisherigen Untersuchungen überall die Zahlen 1 und 2 vertauschen, nd daraus ergibt sich leicht, *daß man das System* S *der* ξ *so bestimmen ann, daß es nicht nur modulo* E_1, *sondern auch modulo* E_2 *Gruppen-genschaft besitzt.*

Es bezeichne nämlich $S^{(1)}$ ein Repräsentantensystem der Gruppe $B_1|E_2$, $^{(2)}$ ein solches der Gruppe $B_2|E_1$, so daß also $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ beide je ein epräsentantensystem der Gruppe $B\,|\,((E_1, E_2))$ darstellen. Sind nun $\xi^{(1)}$ nd $\xi^{(2)}$ zwei Elemente aus $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$, die dieselbe Klasse von $B|((E_1, E_2))$ ertreten, so muß eine Gleichung $\xi^{(1)} = \xi^{(2)} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$; $\varepsilon_i \equiv 0\,(E_i)$ bestehen. etzt man dann $\xi = \xi^{(1)} + \varepsilon_2 = \xi^{(2)} = \varepsilon_1$, so besitzt das System S sowohl

modulo E_1 als auch modulo E_2 Gruppeneigenschaft, wie sich unmittelb aus der oben gemachten Bemerkung 2 ergibt, weil ja die Elemente von aus den Elementen von $S^{(1)}$ bzw. $S^{(2)}$ durch Zufügung eines Element aus E_2 bzw. E_1 hervorgehen.

Wir zeigen nun weiter, daß das so gewählte System S auch absol eine Gruppe darstellt.

Sind nämlich ξ_1 und ξ_2 beliebige Elemente aus S, so gibt es e Element ξ_3 und ein Element ξ_3', die den Kongruenzen $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \equiv 0\,(E$ $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3' \equiv 0\,(E_2)$ genügen. Die Elemente ξ_3 und ξ_3' müssen aber ide tisch sein, weil S keine zwei modulo $((E_1, E_2))$ kongruenten Elemen enthält. Daraus folgt $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \equiv 0\,([E_1, E_2])$, also $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 =$ Das System S enthält also gleichzeitig mit zwei Elementen stets au deren Summe, und in gleicher Weise zeigt man, daß in S gleichzei mit dem Element ξ stets auch das Element $\Theta \cdot \xi$ vorkommt. Wir könn also die ξ so wählen, daß sie eine Gruppe U bilden, und es darf dah wie behauptet, $B = ((E_1, E_2, U))$ gesetzt werden.

Die Gruppe U kann als „Unendlichkeitsgruppe von B" bezeichn werden, da sie nur Elemente enthält, deren sämtliche Zurückleitung hinsichtlich C_1 und C_2 von Null verschieden sind. U ist bis auf I morphie eindeutig bestimmt[22a]).

Der Aufbau der Gruppe B ist jetzt, soweit es für unsere Zwec nötig ist, untersucht. Wir betrachten nun noch den Aufbau der Grupp C_1 und C_2, und zwar unter der besonderen Voraussetzung, daß C_k r der C_k-Komponente von A identisch ist, d. h. daß zu jedem γ bzw. δ δ bzw. γ gefunden werden kann, das der Kongruenz $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$ genü

Satz 10. *Ist* $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ *und ist* C_k *mit der* C_k*-Ko ponente von* A *identisch, so besteht eine Gleichung* $C_1 = ((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}))$, *bei die Gruppen* $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ *folgende Bedeutung haben*: 1. $F^{(1)}$ *ist* C_1*-Komponente von* E_2. 2. $F^{(2)}$ *ist die* C_1*-Komponente einer Gruppe* 3. $F^{(3)}$ *enthält alle Elemente* γ, *die einer Gleichung* $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$ *nügen, wobei* δ *ein beliebiges Element der* C_2*-Komponente von* E_1 *ist Eine analoge Zerlegung existiert für* C_2.

Zum Beweise unseres Satzes haben wir zunächst die Gruppeneig schaft von $F^{(3)}$ nachzuweisen. Ist $\gamma_1 \equiv 0\,(F^{(3)})$; $\gamma_2 \equiv 0\,(F^{(3)})$, so gibt zwei Elemente δ_1 und δ_2, die beide der C_2-Komponente von E_1 angehö und den Kongruenzen $\gamma_i + \delta_i \equiv 0\,(A)\,(i = 1, 2)$ genügen. Dann aber

---

[22]) $F^{(3)}$ enthält also insbesondere die ganze Gruppe $[A, C_1]$, da ja unter Elementen der C_2-Komponente von E_1 auch das Nullelement mitgerechnet werden n

[22a]) Vgl. den Zusatz am Schlusse der Arbeit, durch den der Beweisgang deutend vereinfacht, vor allem Satz 10 überflüssig gemacht wird.

iter $(\gamma_1+\gamma_2)+(\delta_1+\delta_2)\equiv 0\,(A)$, und da $\delta_1+\delta_2$ ebenfalls der C_2-Kom-
nente von C_1 angehört, so muß $\gamma_1+\gamma_2$ definitionsgemäß gleichzeitig
t γ_1 und γ_2 in $F^{(3)}$ auftreten. Indem wir die gleiche Schlußweise auf
und $\Theta\cdot\gamma$ anwenden, erkennen wir die Gruppeneigenschaft von $F^{(3)}$. Wir
weisen nun weiter, daß modulo $[A, C_1]=D_1$ die Gruppen B und
$=((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}))$ isomorph werden. Zu diesem Zwecke stellen wir fest:

1. $F^{(1)}$ ist zu E_2 und $F^{(2)}$ ist zu U absolut und modulo D_1 holoedrisch
morph, da es in E_2 und U kein von Null verschiedenes Element mit
A enthaltener C_1-Komponente geben kann.

2. $F_1^{(3)}$ wird modulo D_1 mit E_1 isomorph. Um die Richtigkeit dieser
hauptung einzusehen, braucht man nur zu bedenken, daß im Falle $D_1=0$
jedem δ aus der C_2-Komponente von E_1 ein eindeutig bestimmtes γ
istiert, das der Gleichung $\gamma+\delta\equiv 0\,(A)$ genügt, und daß dieses γ im Falle
$\neq 0$ von Null verschieden sein muß, da ja jedes Element aus B mit
A enthaltener C_2-Komponente der Gruppe E_2 angehören muß.

3. Ist $\gamma_i\equiv 0\,(F^{(i)})\,(i=1,2,3)$, so besteht eine Kongruenz $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$
$0\,(D_1)$ nur dann, wenn $\gamma_1\equiv\gamma_2\equiv\gamma_3\equiv 0\,(D_1)$ ist. Es sei nämlich
$+\delta_1\equiv 0\,(E_2)$; $\gamma_2+\delta_2\equiv 0\,(U)$; $\gamma_3+\delta_3\equiv 0\,(A)$ und es möge dabei δ_3
C_2-Komponente von E_1 angehören. Dann enthält E_1, wie aus der
eiten Definition dieser Gruppe zu ersehen ist, ein Element von der Form
$+\delta_3$, und daraus folgt angesichts der Bedeutung von γ_3 und δ_3, daß
B-Komponente von $\pm\gamma_3$ der Gruppe E_1 angehört. Da ferner wegen
$+\gamma_2\equiv-\gamma_3\ (A)\gamma_1+\gamma_2$ und $-\gamma_3$ dieselbe B-Komponente besitzen,
ıß die Zurückleitung von $\gamma_1+\delta_1+\gamma_2+\delta_2$ und mithin auch $\gamma_1+\delta_1+\gamma_2+\delta_2$
ber in E_1 enthalten sein. Daraus folgt sofort $\gamma_1+\delta_1=0$; $\gamma_2+\delta_2=0$,
o $\gamma_1=\gamma_2=0$; $\gamma_3\equiv 0\,(D_1)$ (bzw. $\gamma_3=0$ im Falle $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$).

Aus 1., 2. und 3. ergibt sich unmittelbar: Die Gruppen $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$
d absolut und modulo D_1 elementefremd, ihre Summe stellt also ab-
ut und modulo D_1 eine direkte Summe dar. Ferner ist $F^{(1)}$ zu $E^{(2)}$,
$^{2)}$ zu U, $F^{(3)}$ zu E_1 modulo D_1 isomorph. Daraus folgt sofort der
morphismus von B und C_1' modulo D_1 und mit Hilfe dieser Tatsache
nn weiter die Gleichung $((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}))=C_1'=C_1$ leicht bewiesen
rden.

Modulo D_1 sind nämlich A und C_1 elementefremd, es ist daher nach
tz 1 modulo D_1 die Gruppe C_1 zu einer Untergruppe von B isomorph.
rmöge dieses Isomorphismus wird nun C_1' isomorph auf eine Untergruppe
n B abgebildet, und zwar auf eine echte Untergruppe, falls C_1' modulo
nicht mit C_1 identisch ist. Da nun C_1' zu B isomorph ist, und da B
keiner echten Untergruppe isomorph sein kann, so folgt aus unsern
erlegungen die Gleichheit von C_1 und C_1' modulo D_1. Daraus ergibt

sich aber sofort die absolute Gleichheit von C_1 und C_1', weil ja die ganz Gruppe D in $F^{(3)}$ enthalten ist. Hiermit ist Satz 10 bewiesen; mit seine Hilfe wird es uns im folgenden Paragraphen verhältnismäßig leicht sei den Fundamentalsatz zu beweisen.

§ 6.

Der Fundamentalsatz.

Satz 11. *Ist* $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ *und ist* $[A, C_i] \neq 0$ $(i = 1, 2$ *so ist* A *zerlegbar.*

Wir dürfen voraussetzen, daß C_k die C_k-Komponente von A da stellt. Ist nämlich C_k' die C_k-Komponente von A, so haben w $G' = ((C_1', C_2')) = ((A, [B, G']))$, denn jedes Element aus G' läßt sich der Form $\alpha + \beta$ darstellen, wobei β in $[B, G']$ auftritt, weil α als El ment von A in G' vorkommt. Für die Gruppe G' sind aber die Voraus setzungen von Satz 11 ebenfalls erfüllt, weil $[A, C_k'] = [A, C_k] \neq 0$ i Wir dürfen daher von vornherein C_k als C_k-Komponente von A annehm und können dann von Satz 10 Gebrauch machen.

Setzen wir gemäß der in § 5 verwandten Bezeichnungsweise $= ((E_1, E_2, U))$; $C_1 = ((F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}))$, so haben wir $A = ((G_1, G_2$ wobei G_1 und G_2 folgendermaßen definiert sind: G_1 ist diejenige Unt gruppe von A, deren C_1-Komponente durch $F^{(3)}$ gegeben ist, währe ihre C_2-Komponente durch die C_2-Komponente von E_1 dargestellt wi G_2 hingegen ist diejenige Untergruppe von A, deren C_1-Komponente $((F^{(1)}, F^{(2)}))$ identisch ist, während die C_2-Komponente aus der Gesamth derjenigen Elemente δ besteht, die einer Gleichung $\gamma + \delta \equiv 0$ ($\gamma \equiv 0$ $((F^{(1)}, F^{(2)}))$ genügen, also insbesondere die ganze Gruppe $[A, C_2] =$ enthält[23]).

Daß G_1 Gruppeneigenschaft besitzt, ist klar. Daß das gleiche G_2 gilt, erkennt man mit Leichtigkeit auf ähnliche Weise, wie beim weise von Satz 10 die Gruppeneigenschaft von $F^{(3)}$ bewiesen wurde. Fer wird die Gruppe G_1 zu G_2 elementefremd, weil jedenfalls die C_1-Kom nenten von G_1 und G_2 elementefremd sind, und weil außerdem G_1 von Null verschiedenes Element aus C_2 enthält[24]). Schließlich erschöp G_1 und G_2 zusammen die Gruppe A, denn $((G_1, G_2))$ besitzt diese

[23]) Es besteht also G_2 aus der Gesamtheit der Elemente $\gamma + \delta$, wobei γ Element aus $((F^{(1)}, F^{(2)}))$, δ ein der Gleichung $\gamma + \delta \equiv 0\,(A)$ genügendes Elem bedeutet. G_1 ist ganz analog definiert, nur daß C_1 und C_2 die Rollen tauschen (die Definition von $F^{(3)}$).

[24]) Man beachte, daß E_1 kein von Null verschiedenes Element mit in A kommender C_2-Komponente enthält.

-Komponente wie A und enthält außerdem die ganze Gruppe D_2. Aus r nunmehr bewiesenen Richtigkeit der Gleichung $A = ((G_1, G_2))$ folgt fort die Richtigkeit von Satz 11, denn für $[A, C_i] \neq 0 \cdot (i = 1, 2)$ sind e Gruppen G_1 und G_2 von Null verschieden.

Den eben bewiesenen Satz kann man auch so aussprechen:

Ist $((A, B)) = ((A_1, A_2))$, und ist A weder zu seiner A_1-, noch zu iner A_2-Komponente isomorph, so ist A zerlegbar. In dieser Form werden ir jetzt das gewonnene Ergebnis verallgemeinern.

Satz 12. *Ist* $G = ((A, B)) = ((A_1, A_2, \ldots, A_r))$ *und ist* A *zu keiner iner* A_i*-Komponenten isomorph, ist also* A *zur Summe von je* $r - 1$ *er Gruppen* A_i *niemals elementefremd, so ist* A *zerlegbar.*

Beim Beweise darf man $A_i = A_i^{(A)}$ als A_i-Komponente von A voraus-tzen. (Dies wird auf dieselbe Weise gezeigt, wie wir die Richtigkeit der ntsprechenden Behauptung bei Satz 11 nachwiesen.) Wir nehmen nun an, atz 12 sei für $r = r_0 - 1$ bewiesen (für $r_0 = 3$ ist diese Voraussetzung ja der Tat richtig), und zeigen dann seine Gültigkeit für r_0.

Es sei $\bar{A}_1 = ((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$ und $\bar{A}_1^*$ bezeichnet die der Darstel-ng $G = ((A_1, \bar{A}_1))$ entsprechende A_1-Komponente von A[25]). Dann be-eht eine Gleichung $((A_1, \bar{A}_1^*)) = ((A, [B, ((A_1, \bar{A}_1^*))])) = ((A, B_1))$. Ist un A zu $\bar{A}_1^*$ nicht isomorph, so können wir Satz 11 anwenden und unmittel-ar auf die Zerlegbarkeit von A schließen.

Es ist also nur noch der Fall zu untersuchen, daß A zu A_1 elemente-emd, und mithin zu $\bar{A}_1^*$ isomorph ist. Hier sind zwei Möglichkeiten zu nterscheiden:

a) $[B_1, \bar{A}_1^*] \neq 0$. In diesem Falle betrachten wir die Restklassen-ruppe von $((A, B_1))$ nach $[B_1, \bar{A}_1^*]$. A', B_1' usw. mögen die Gruppen be-euten, die in dieser Restklassengruppe A, B_1 usw. entsprechen. Dann nd A_1' und $\bar{A}_1^*$ elementefremd wegen der Elementefremdheit von A_1 und $_1^*$. In ähnlicher Weise erkennt man die Richtigkeit der Gleichung $A', B_1'] = 0$. Schließlich folgt aus der Elementefremdheit von A und B_1 och die Isomorphie von A und A'. $\bar{A}_1^{*\prime}$ hingegen kann nicht zu A' iso-norph sein, da nach einer seiner von 0 verschiedenen Untergruppen die estklassengruppe gebildet wurde. Wir können daher auf die Gleichung $A', B_1')) = ((A_1', \bar{A}_1^{*\prime}))$ den Satz 3 anwenden, und aus ihm die Zerleg-arkeit von A' und folglich von A erschließen.

b) $[B_1, \bar{A}_1^*] = 0$. In diesem Falle muß B_1 zu einer Untergruppe on A_1 und umgekehrt (wegen der Elementefremdheit von A_1 und A) $_1$ zu einer Untergruppe von B_1 isomorph sein. Daraus ergibt sich die

[25]) Diese Komponente ist natürlich im allgemeinen von der direkten Summe er A_i-Komponenten von A $(i = 2, 3, \ldots, r)$ verschieden.

Isomorphie von A_1 und B_1. Es muß also A_1 die A_1-Komponente von B darstellen, und es muß daher für ein beliebiges Element $\alpha \equiv 0(A_1)$ ein Element von der Form $\alpha + \beta$; $\beta \equiv 0(\bar{A}_1^*)$ in B_1 vorkommen. Daraus folgt, daß man jedes Element aus B in der Gestalt $\eta + \vartheta$ darstellen kann, wobei $\eta \equiv 0(B_1)$; $\vartheta \equiv 0([B, \bar{A}_1])$ ist. Aus $[B_1, \bar{A}_1^*] = 0$ ergibt sich nun, daß B_1 auch zu $\bar{A}_1$ elementefremd sein muß[26]), wir haben also $B = ((B_1, [B, \bar{A}_1]))$, mithin $G = ((A, B)) = ((A, B_1, [B, \bar{A}_1])) = ((A_1, \bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1]))$. (Daß in der letzten Gleichung ebenfalls die Doppelklammer stehen darf, erkennt man unmittelbar aus der Tatsache, daß jedes Element aus $[\bar{A}_1^*, B, \bar{A}_1]$ auch in B_1 vorkommen, und folglich gleich 0 sein muß.) Aus der abgeleiteten Gleichung folgt weiter $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$. Denn $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1]))$ stellt eine Untergruppe von $((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$ dar, die nach Satz 1 wegen der Gültigkeit der Gleichung $((A_1, \bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_1, A_2, \ldots, A_{r_0}))$ zu $((A_2, A_3, \ldots, A_{r_0}))$ isomorph ist.

Von der Gleichung $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_2 \ldots A_{r_0})$ ausgehend, schließen wir jetzt so weiter:

Die Gruppe $\bar{A}_1^*$ ist wegen ihrer Isomorphie mit der Gruppe A zu keiner ihrer A_i-Komponenten $(i = 2, 3, \ldots, r_0)$ isomorph. Denn diese Komponenten sind ja Untergruppen von A_i $(i = 2, \ldots, r_0)$ und jede der Gruppen A_i ist zu einer *echten* Restklassengruppe von A isomorph. Da nun auf der rechten Seite von $((\bar{A}_1^*, [B, \bar{A}_1])) = ((A_2 \ldots A_{r_0}))$ insgesamt nur $r_0 - 1$ Komponenten auftreten, so kann von Satz 12 Gebrauch gemacht werden. $\bar{A}_1^*$ und mithin A müssen also zerlegbar sein.

Hiermit ist der Schluß von r_0 auf $r_0 + 1$ allgemein durchgeführt und Satz 12 ist voll bewiesen. Wir benutzen das gewonnene Ergebnis zum Beweise des Fundamentalsatzes.

Es seien $G = ((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((B_1, B_2, \ldots, B_s))$ zwei Darstellungen von G durch unzerlegbare Summanden. *Wir zeigen dann zuerst, daß bei geeigneter Wahl der Numerierung B_1 als B_1-Komponente von A_1 und A_1 isomorph angenommen werden darf.* In der Tat, nach Satz 12 kann die Bezeichnung jedenfalls so gewählt werden, daß A_1 zu seiner B_1-Komponente isomorph ist. Sollte diese Komponente nun eine echte Untergruppe von B_1 werden, so suchen wir weiter eine Gruppe A_i, derart, daß B_1 zu seiner A_i-Komponente isomorph wird. Eine solche Gruppe existiert nach Satz 12 stets, und zwar muß sie von A_1 verschieden sein, weil man andernfalls zu einer isomorphen Abbildung von A_1 auf eine seiner echten Untergruppen käme, indem man zunächst A_1 auf seine B_1-Komponente alsdann wieder B_1 auf seine A_1-Komponente isomorph abbildete. Wir dürfen also annehmen, daß B_1 zu seiner A_2-Komponente isomorph wird

[26]) Weil jedes Element aus $[\bar{A}_1, B_1]$ auch in $\bar{A}_1^*$ vorkommen muß.

Wir wenden nun dieselbe Schlußweise, die wir eben bei B_1 benutzten, auf B_2 an, und finden, daß bei geeigneter Wahl der Bezeichnung A_2 zu seiner B_2-Komponente isomorph wird, falls nicht A_2 mit der A_2-Komponente von B_1 identisch ist. Tritt der erstere der beiden Fälle ein, so beachten wir, daß dann A_1 zu einer *echten* Untergruppe von B_2 isomorph sein muß, wie man erkennt, wenn man zuerst A_1 auf seine B_1-Komponente, alsdann B_1 auf seine A_2-Komponente, schließlich A_2 auf seine B_2-Komponente isomorph abbildet. Wir kommen unter Benutzung dieser Tatsache entsprechend dem Früheren zu der Alternative: Entweder es ist B_2 mit der B_2-Komponente von A_3 identisch, oder es wird bei geeigneter Numerierung B_2 zu seiner A_3-Komponente isomorph. Indem wir nun immer nach dem gleichen Schema Schritt für Schritt weiterschließen, kommen wir entweder einmal zu dem Falle, daß A_i zu seiner B_i-Komponente oder B_i zu seiner A_{i+1}-Komponente isomorph und daß diese Komponente mit B_i bzw. A_{i+1} identisch wird. Dann brauchen wir bloß geeignet umzunumerieren und eventuell die Buchstaben A und B zu vertauschen um zu erreichen, daß die B_1-Komponente von A_1 mit B_1 identisch und zu A_1 isomorph wird. Oder aber es tritt für $r \leqq s$ (für $s \leqq r$ erleiden unsere Betrachtungen nur eine ganz unwesentliche Änderung) der Fall ein, daß A_i zu einer echten Untergruppe von B_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und B_i zu einer echten Untergruppe von A_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ isomorph wird. Dann aber ist nicht nur A_r, sondern auch jede der Gruppen A_i $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ zu einer *echten* Untergruppe von B_r isomorph. (Das erkennt man durch wiederholte isomorphe Abbildung genau so, wie wir oben zeigten, daß bei unsern Annahmen A_1 zu einer echten Untergruppe von B_2 isomorph wurde.) Es kann daher B_r zu keiner Untergruppe irgendeines A_i isomorph sein, im Widerspruch mit den Schlüssen, die wir aus Satz 12 ziehen können.

Der zuletzt angenommene Fall ist also ausgeschlossen und wir dürfen daher von vornherein von der Annahme ausgehen, daß die B_1-Komponente von A_1 mit B_1 identisch und zu A_1 isomorph ist[27]). Dann haben wir zunächst $[A_1, ((B_2 \ldots B_s))] = 0$ nach Satz 1 und weiter $((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((A_1, B_2, , .., B_s)) = G$. Denn die Gruppe $((A_1, B_2, \ldots, B_s))$ enthält die ganze Gruppe B_1, weil zu jedem Element $\beta \equiv 0\,(B_1)$ ein Element $\alpha \equiv 0\,(A_1)$ gehört, derart, daß $\alpha = \beta + \bar{\beta}$; $\bar{\beta} \equiv 0\,(((B_2 \ldots B_s)))$ wird. Aus der Gleichung $((A_1, A_2, \ldots, A_r)) = ((A_1, B_2, \ldots, B_s))$ folgt weiter nach Satz 1 die

[27]) Bei den gewöhnlichen endlichen Abelschen Gruppen, sowie bei den Gruppen von endlichem Rang läßt sich die Möglichkeit dieser Annahme wesentlich einfacher beweisen als bei den allgemeinen v. e. A. G. Man braucht nur A_1 so zu wählen, daß keine der Gruppen A_i und B_i mehr Elemente bzw. größeren Rang als A_1 besitzt und B_1 so, daß A_1 zu seiner B_1-Komponente isomorph wird. Dann ergibt sich unmittelbar die Identität von B_1 mit dieser Komponente.

Isomorphie der Gruppen $((A_2 \dots A_r))$ und $((B_2 \dots B_s))$. Auf Grund dieser Tatsache beweist man nun die Gültigkeit des Fundamentalsatzes mit Hilfe der vollständigen Induktion nach demselben Schema, nach dem wir in § 3 den Beweis des Hauptsatzes für die vollständig reduziblen Gruppen geführt haben. Wir schenken uns die Durchführung des trivialen Beweises und formulieren nur noch das gewonnene Ergebnis ausführlich:

Fundamentalsatz: *Sind* $G = ((A_1, A_2, \dots, A_r)) = ((B_1, B_2, \dots, B_s))$ *zwei Darstellungen der Gruppe* G *durch unzerlegbare Summanden, so ist* $r = s$, *und bei geeigneter Numerierung sind* A_i *und* B_i *isomorph.*

Es soll nun noch untersucht werden, wann die Darstellung einer Gruppe durch unzerlegbare Summanden absolut eindeutig ist und wann es tatsächlich verschiedene Darstellungen gibt. Es gilt:

Satz 13. *Ist* $G = ((A_1, A_2, \dots, A_r))$ *eine Darstellung von* G *durch unzerlegbare Summanden, so ist diese Darstellung dann und nur dann eindeutig, wenn keine der Gruppen* A_i *eine zu einer Restklassengruppe von* A_k $(i \neq k)$ *isomorphe, von* 0 *verschiedene Untergruppe enthält.*

In der Tat, es bedeute B_1 eine Untergruppe von A_1, $B_2 \neq 0$ eine solche von A_2, und es sei $A_1 | B_1$ zu B_2 isomorph. Wir bezeichnen dann mit β ein beliebiges Element aus B_1, mit ξ einen Repräsentanten der Gruppe $A_1 | B_1$, mit ζ dasjenige Element aus B_2, das dem Repräsentanten ξ durch den zwischen $A_1 | B_1$ und B_2 bestehenden Isomorphismus zugeordnet ist, und betrachten das System A_1', das aus der Gesamtheit aller Elemente von der Form $\beta + \xi + \zeta$ besteht. *Dieses System bildet eine Gruppe.* In der Tat, sind $\beta_1 + \xi_1 + \zeta_1$ und $\beta_2 + \xi_2 + \zeta_2$ zwei beliebige Elemente des Systems, so gehört auch das Element $(\beta_1 + \xi_1 + \zeta_1) + (\beta_2 + \xi_2 + \zeta_2) = (\beta_1 + \beta_2) + (\xi_1 + \xi_2) + (\zeta_1 + \zeta_2)$ dem Systeme an, weil $\beta_1 + \beta_2$ ein Element aus B_1 ist, und weil dem Repräsentanten $\xi_1 + \xi_2$ der Gruppe $A_1 | B_1$ vermöge des zwischen $A_1 | B_1$ und B_2 bestehenden Isomorphismus das Element $\zeta_1 + \zeta_2$ aus B_2 zugeordnet ist. In ganz entsprechender Weise zeigt man, daß auch die Anwendung der Operatoren nicht aus dem System herausführt, A_1' besitzt also tatsächlich Gruppeneigenschaft.

Die Gruppe A_1' ist von A_1 verschieden, weil nicht alle Elemente gleich 0 sind, sie ist zu A_2 elementefremd, weil dem Repräsentanten des Nullelements in $A_1 | B_1$ nur das Nullelement aus B_2 zugeordnet ist, schließlich besteht, wie unmittelbar zu sehen, die Gleichung $((A_1', A_2)) = ((A_1, A_2))$ und mithin $((A_1', A_2, \dots, A_r)) = ((A_1, A_2, \dots, A_r))$. Die in Satz 13 angegebene Bedingung ist also für die Eindeutigkeit der Darstellung notwendig.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Es sei nämlich $((A_1, A_2, \dots, A_r)) = ((A_1', A_2', \dots, A_r'))$, wobei etwa A_1' unter den Gruppen A_i nicht auftritt

ann dürfen wir nach dem Fundamentalsatz bei geeigneter Wahl der Bezeichnung voraussetzen, daß A_1 mit der A_1-Komponente von A_1' identisch nd zu A_1' isomorph ist. Setzen wir $[A_1, A_1'] = D$; $((A_2 \ldots A_r)) = \bar{A}$ und ezeichnen wir mit $\bar{A}'$ die $\bar{A}$-Komponente von A_1', so ist $\bar{A}'$ nach Satz 1 u $A_1' \mid D$ und folglich auch zu $A_1 \mid D$ isomorph[28]). Wir betrachten nun ie A_i-Komponenten von $\bar{A}'$. Diese sind Untergruppen der Gruppen A_i, ie nicht sämtlich gleich der Nullgruppe sein können, weil $\bar{A}'$ wegen $_1 \neq A_1'$ und mithin $[A_1', A_1] \neq A_1'$ von der Nullgruppe verschieden sein uß. Es sei etwa die A_2-Komponente von $\bar{A}'$, die wir mit B_2 bezeichnen ollen, von Null verschieden. Dann ist B_2 zu einer Restklassengruppe on $\bar{A}'$ und folglich zu einer Restklassengruppe von $A_1 \mid D$ isomorph. ine Restklassengruppe von $A_1 \mid D$ kann aber auch als Restklassengruppe on A_1 aufgefaßt werden[29]). Aus der Existenz zweier verschiedener Zeregungen für die Gruppe G im Sinne des Fundamentalsatzes kann also bei eeigneter Wahl der Bezeichnung auf die Isomorphie einer von Null verchiedenen Untergruppe von A_2 mit einer Restklassengruppe von A_1 geschlossen werden, d. h. die in Satz 13 angegebene Eindeutigkeitsbedingung st nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. — Im Falle der vollständig reduziblen Gruppen erhalten wir aus Satz 13 die in der Literatur ohlbekannte Bedingung: *Die Darstellung einer vollständig reduziblen ruppe durch irreduzible Komponenten ist dann und nur dann eindeutig, enn keine zwei isomorphen Komponenten auftreten.* — Wir verlassen jetzt ie allgemeine Theorie, um uns Anwendungen zuzuwenden.

§ 7.

Formale Theorie der Differentialgleichungssysteme[30]).

Um die in den vorangehenden Paragraphen entwickelte Theorie anzuwenden, müssen wir zunächst über den Operatorenbereich weitergehende Annahmen als bisher machen. Wir wollen in diesem Paragraphen an-

---

[28]) Man beachte, daß die isomorphe Zuordnung von A_1 und A_1' in unserm Falle derart ist, daß die Elemente von D sich selber zugeordnet werden.

[29]) Ist nämlich $(A \mid D) \mid D_1$ die in Betracht kommende Gruppe, so hat man bei Benutzung der Bezeichnungsweise von § 1 und § 2: $(A \mid D) \mid D_1 = A \mid (D \cap D_1)$.

[30]) Vgl. zu diesem Paragraphen die Abhandlungen: A. Loewy, Über Matrizen- und Differentialkomplexe, Math. Ann. 78 (1917), S. 1—51 bzw. S. 343—368; Begleitmatrizen und lineare homogene Differentialausdrücke, Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 58—125; E. Noether-W. Schmeidler, Moduln in nicht-kommutativen Bereichen, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 1 bis 35. Die genannten Arbeiten sollen in Zukunft kurz mit L. I, L. II, N.-S. zitiert werden. In N. S. sind, wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, allgemein partielle Differentialgleichungssysteme in den Kreis der Betrachtung gezogen, doch läßt sich von unserer Theorie auf solche Systeme im allgemeinen keine Anwendung machen, da die ihnen zugeordneten Gruppen nicht not-

nehmen, daß O einen Körper $\mathfrak{K}$ enthält, in dem analytische Funktionen einer Variablen x vorkommen[31]), und daß dabei insbesondere in $\mathfrak{K}$ stets gleichzeitig mit $a(x)$ auch die abgeleitete Funktion $\frac{d}{dx}a(x) = a'(x)$ auftritt. Außer den Elementen von $\mathfrak{K}$ soll in O nur noch der eine Operator $\frac{d}{dx}$, die Differentiation, vorkommen. Der Operator $\frac{d}{dx}$ stellt also dann den Operatorenbereich O' im Sinne von § 4 dar.

Es sei jetzt $G = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eine Gruppe vom endlichen Range n. Dann müssen sich die Ableitungen $\frac{dy_i}{dx}$ linear und homogen durch die y_i ausdrücken lassen, wir haben also ein lineares und homogenes Differentialgleichungssystem (in Zukunft abgekürzt Ds.): $\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k$, das wir auch als Matrizengleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right) = A(y)$ schreiben können. Dabei bedeutet A die Matrix $\|a_{ik}\|$, (y) (und entsprechend $\left(\frac{dy}{dx}\right)$) eine Matrix von der besonderen Gestalt

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & 0 & \ldots & 0 \\ y_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

Durch unser Ds. ist der Aufbau der Gruppe G vollständig bestimmt, denn wir können mit seiner Hilfe nicht nur die ersten Ableitungen der y_i durch die y_i selbst, sondern auch, wie man durch $n-1$-fache Differentiation des Ds. erkennt, die Ableitungen n-ter Ordnung durch diejenigen $n-1$-ter bis 0-ter Ordnung und folglich letzten Endes durch die y_i allein ausdrücken.

Das Ds. seinerseits ist durch G nicht eindeutig bestimmt, es hängt vielmehr von der Basis ab, die wir für G wählen. Ist $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine zweite Basis von G, so besteht eine Transformationsgleichung $(y) = P\cdot(z)$, wobei P eine Matrix mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ und mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Wir erhalten daher $\frac{d}{dx}(P\cdot(z)) = A\cdot P\cdot(z)$, $\frac{d}{dx}P\cdot(z) + P\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right) = A\cdot P\cdot(z)$, oder wenn wir $\frac{d}{dx}P = P'$ setzen, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = (-P^{-1}\cdot P' + P^{-1}\cdot A\cdot P)\cdot(z)$. Das für die (z) gültige Ds., das wir aus dem für die (y) gültigen durch eine lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ und mit nicht verschwin-

---

wendig v. e. A. G. zu sein brauchen. Wir gehen daher hier nicht näher auf partielle Systeme ein, vor allem deshalb, weil bisher noch keine Methode vorliegt, um die partiellen Systeme mit zugeordneten v. e. A. G. von beliebigen Systemen zu unterscheiden.

[31]) Im Spezialfall kann natürlich $\mathfrak{K}$ auch ausschließlich aus Konstanten bestehen.

ender Determinante erhalten haben, heißt mit dem zu den (y) gehörigen Ds. *„von derselben Art“* [32]). Den Zusammenhang zwischen Gruppe und Ds. önnen wir jetzt so formulieren:

Zu jeder Gruppe gehört eine Klasse von Ds. derselben Art (d. h. die Gesamtheit der Ds., die mit einem festen Ds. von derselben Art sind) und jedem Ds. der Klasse entspricht eine Basis der Gruppe.

Erhält man zwischen den Gruppen $G=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ und $G'=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dadurch eine isomorphe Zuordnung, daß man jeweils y_i und z_i einander zuordnet, so müssen die zwischen den Ableitungen der y_i und den y_i selbst bestehenden Differentialgleichungen mit denen wischen den Ableitungen der z_i und den z_i identisch sein, d. h. wenn wir $\left(\frac{dy_i}{dx}\right)=A\cdot(y)$; $\left(\frac{dz_i}{dx}\right)=A'\cdot(z)$ setzen, so muß die Matrizengleichung $A=A'$ estehen. Umgekehrt ist die Gültigkeit dieser Gleichung hinreichend dafür, daß die Zuordnung von y_i und z_i zwischen den Gruppen G und G' inen Isomorphismus herstellt. Daraus ergibt sich unmittelbar der Satz:

Zwei Gruppen sind dann und nur dann isomorph, wenn ihnen dieselbe Ds.-Klasse zugeordnet ist.

Um nun, gestützt auf den Zusammenhang zwischen Gruppen und Ds., us dem Fundamentalsatz ein Theorem über Ds. abzuleiten, müssen wir ntersuchen, was aus der Zerlegbarkeit einer Gruppe G für die zugehörige Ds.-Klasse folgt. Ist $G=((A, B))$ und bezeichnet $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}$ $(0<n_1<n)$ ine Basis von A, $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_n$ eine solche von B, so betrachten wir as Ds. D, das der Basis $y_1, y_2, \ldots, y_n$ entspricht. D muß offenbar die Gestalt

$$\frac{dy_{i_1}}{dx}=\sum_{k=1}^{n_1} a_{i_1 k}\, y_k \qquad (i_1=1, 2, \ldots, n_1);$$

$$\frac{dy_{i_2}}{dx}=\sum_{k=n_1+1}^{n} a_{i_2 k}\, y_k \qquad (i_2=n_1+1, n_1+2, \ldots, n)$$

esitzen, es zerfällt also in zwei Ds. D_1 und D_2 von den Ordnungen n_1 zw. $n-n_1$. *Wir wollen eine Klasse von Ds. gleicher Art und ebenso edes einzelne Ds. der Klasse zerlegbar oder unzerlegbar nennen, je nachdem ob in der Klasse ein zerfallendes Ds. vorkommt oder nicht.* Dann önnen wir feststellen:

Eine Gruppe G ist zerlegbar oder nicht, je nachdem ihre zugeordnete Ds.-Klasse zerlegbar oder unzerlegbar ist.

---

[32]) Vgl. L. I u. II. Dort findet man die wesentlichen Grundlagen für den hier argelegten Zusammenhang zwischen Gruppen und Ds. Der Begriff des „von derselben Art seins“ ist symmetrisch, reflexiv, transitiv (vgl. L. I, S. 6 f.).

Stellt man die Gruppe D als direkte Summe von unzerlegbaren Summanden $A_1, A_2, \ldots, A_r$ dar und bezeichnet man mit $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ eine Basis von A_i, so erhält man zu der Basis $(\ldots, y_{ik}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, n_i)$ ein Ds., das in r unzerlegbare Ds. zerfällt, die zu den Gruppen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ gehören. Es gibt also in jede Klasse von Ds. gleicher Art ein in unzerlegbare Ds. zerfallendes System oder mit andern Worten, *man kann jedes Ds. durch eine lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen in eine Kette von unzerlegbaren Ds. überführen.* Die Art dieser Transformation wird im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt sein, durch Anwendung unseres Fundamentalsatzes erhalten wir aber angesichts des Zusammenhangs zwischen Ds. und Gruppen

Satz 14. *Wie auch immer man ein Ds. in eine Kette von unzerlegbaren Ds. überführt, stets ist die Anzahl der unzerlegbaren Komponenten die gleiche und bei geeigneter Numerierung sind entsprechende Komponenten von derselben Art*[33]).

Man kann das eben ausgesprochene Theorem sofort auf Matrizen übertragen, denn wir können ja jedem Ds. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = A \cdot (y)$ in eindeutiger Weise seine Matrix A zuordnen. Wir werden dann zwei Matrizen A und B von derselben Art nennen, wenn ihre zugehörigen Ds. von derselben Art sind, wenn also eine Gleichung $A = -P^{-1} \cdot P' + P^{-1} B P$ besteht, ferner wird eine Matrix zerlegbar heißen, wenn sie mit einer Matrix $\left\| \begin{matrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{matrix} \right\|$ von derselben Art ist, wobei A_1 und A_2 Matrizen von niedrigerem Grade als bedeuten. Wir erhalten dann als Analogon zu Satz 14:

Satz 15. *Jede Matrix A ist mit einer Matrix*

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & A_r \end{matrix} \right\|$$

von derselben Art, wobei $A_1, A_2, \ldots, A_r$ unzerlegbare Matrizen bedeuten, d. h. jede Matrix läßt sich in eine Kette von unzerlegbaren Matrizen überführen. Wird eine gegebene Matrix auf zwei verschiedene Weisen in ei

[33]) Um die Allgemeingültigkeit von Satz 14 einzusehen, beachte man, daß s nicht nur jeder Gruppe eine Klasse von Ds., sondern auch jedem Ds. eine Grup zuordnen läßt. Ist nämlich $D \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right) = A \cdot (y)$ das gegebene System, so braucht m nur die Linearformen in den y_i zu betrachten und die Transformationsformeln zwisch den y_i und ihren Ableitungen mit Hilfe von D zu definieren. In entsprechender We läßt sich jeder Matrix A eine Gruppe zuordnen, indem man einfach A als die Koe zientenmatrix eines Ds. ansieht.

ette von unzerlegbaren Matrizen übergeführt, so stimmt bei beiden Ketten e Anzahl der Komponenten überein und bei geeigneter Numerierung sind tsprechende Komponenten von der gleichen Art[34]).

Enthält der Körper $\mathfrak{R}$ nur Konstanten, so sind A und B nach der en gegebenen Definition von derselben Art, wenn eine Gleichung $= P^{-1}BP$ besteht. In diesem Falle heißen A und B nach der gebräuchlichen Ausdrucksweise ähnlich, und wir können daher feststellen:

Ist eine Matrix zwei Ketten von unzerlegbaren Matrizen ähnlich, so t bei beiden Ketten die Anzahl der Komponenten gleich, und bei geeigneter Numerierung sind entsprechende Komponenten ähnlich.

Es ist das eine Tatsache, die aus der Elementarteilertheorie wohl ekannt ist.

Man kann nun den Begriff der v. A. G. auch bei linearen Differenalgleichungen (in Zukunft kurz Dg.) n-ter Ordnung mit einer abhängigen Veränderlichen y anwenden. Zunächst sagt man, zwei Dg. n-ter rdnung mit Koeffizienten aus einem Funktionenkörper $\mathfrak{R}$ sind von derselben Art, wenn sie es als Dg. erster Ordnung mit n abhängigen Veränderlichen aufgefaßt sind. Ferner nennen wir die Dg. $D(y) = 0$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der total teilerfremden[35]) Dg. $D_1(y) = 0$, $D_2(y) = 0, \ldots, D_r(y) = 0$, wenn die Gesamtheit der Integrale von D mit der Gesamtheit der Integrale von $D_1, D_2, \ldots, D_r$ übereinstimmt, und wenn außerdem die Gleichung $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ besteht, falls n die Ordnung von D und n_i diejenige von D_i bedeutet. Schließlich wollen wir eine Dg. zerlegbar nennen, wenn sie sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von total teilerfremden Komponenten niedrigerer Ordnung darstellen läßt, im andern Falle soll sie unzerlegbar heißen. Es ist unmittelbar klar, daß jede Dg. sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von unzerlegbaren Dg. darstellen läßt. *Ferner kann man, wie in N.-S. gezeigt ist*[36]), *jeder Dg. eine v. A. G., in der N.-S. Terminologie ihre „Restgruppe" zuordnen, derart, daß einer zerlegbaren Dg. eine zerlegbare Restgruppe entspricht und umgekehrt, und daß für die Gleichartigkeit zweier*

---

[34]) Dieser Satz, sowie Satz 14 war bisher nur in dem Falle bekannt, in dem das s. bzw. die Matrix „vollständig reduzibel" ist, d. h. in dem die zugeordnete Gruppe ich als direkte Summe von irreduziblen Gruppen darstellen läßt. — Vgl. L. II, S. 103, atz 6, sowie A. Loewy, Über vollständig reduzible Differentialgleichungen, Math. nn. 62 (1906), S. 106.

[35]) Der Ausdruck „total teilerfremd" bezieht sich auf die Tatsache, daß wegen er Ordnungsbedingung $n = \Sigma n_i$ zwischen den Integralen von $D_1, D_2, \ldots, D_r$ keine ineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen kann.

[36]) N.-S. § 3 u. § 4.

Dg. die Isomorphie der Restgruppen notwendige und hinreichende Be dingung ist. Dabei besitzt die einer gewöhnlichen (nicht partiellen) Dg zugeordnete Restgruppe endlichen Rang. Wir können daher den Fundal mentalsatz anwenden und feststellen:

Satz 16. *Wie auch immer man eine Dg. als kleinstes gemeinschaf liches Vielfaches von unzerlegbaren, total teilerfremden Dg. darstellt, stet ist die Anzahl der Komponenten gleich, und bei geeigneter Numerierun sind entsprechende Komponenten von derselben Art*[37]).

Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Sätze lassen sich infolge de formalen Natur der Beweismethode unmittelbar auf den Fall übertragen daß wir statt mit der Differentiation mit der Differenzenbildung als Ope rator arbeiten, daß wir also die Theorie der Differenzen- statt die de Differentialgleichungen behandeln[38]).

§ 8.

Zerlegung von Matrizenkomplexen[39]).

In § 7 haben wir uns u. a. mit der Zerlegung einer Einzelmatri beschäftigt und einen grundlegenden Eindeutigkeitssatz aufgestellt. E liegt nun nahe, die diesbezüglichen Untersuchungen auf Komplexe [in besondere auf (gewöhnliche) Gruppen] von Matrizen zu übertragen. D Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß der Körper $\mathfrak{R}$, dem d Matrizenelemente entnommen werden, nur Konstanten enthält. Im al gemeinen Fall, wo analytische Funktionen einer Variablen auftreten, lasse sich die Untersuchungen in genau gleicher Weise führen.

Es seien $A = \{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots\}$, $B = \{B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots\}$ *zwei Komplex von Matrizen n-ten Grades*[40]), *dann heißen A und B ähnlich, wenn ei feste Matrix P existiert, die für jedes i der Gleichung* $A^{(i)} = P^{-1}B^{(i)}$ *Genüge leistet. Ein Matrizenkomplex heißt dann und nur dann zerlegba wenn er einem Komplex* $\Gamma = \{C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots\}$ *ähnlich ist, bei dem f jedes i die Matrix* $C^{(i)}$ *die Gestalt* $C^{(i)} = \left\| \begin{matrix} C_1^{(i)} & 0 \\ 0 & C_2^{(i)} \end{matrix} \right\|$ *besitzt, wobei in besondere alle Matrizen* $C_1^{(i)}$ *(und mithin auch alle Matrizen* $C_2^{(i)}$*) de*

[37]) Auch dieser Satz war bisher nur im Falle der vollständigen Reduzibilität d auftretenden Dg. bzw. Restgruppen bekannt. Vgl. N.-S. § 4, wo vollständig reduzibl *partielle* Dg. betrachtet werden.

[38]) Vgl. N.-S. § 1.

[39]) Vgl. zu dem vorliegenden Paragraphen L. I.

[40]) Der obere Index in den geschweiften Klammern soll nur zur Unterscheidu der einzelnen Matrizen dienen. Er soll nicht andeuten, daß jeder Komplex nur z zählbar viele Matrizen enthalten darf. Das gewonnene Resultat gilt z. B. unmittelbl für kontinuierliche Matrizengruppen.

ben von 0 und n verschiedenen Grad besitzen. Von dem Matrizen-
mplex Γ wollen wir sagen, er zerfalle in die beiden Komplexe
$= \{C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, \ldots\}$ $(i = 1, 2)$. Zu jedem Komplex A gibt es einen ähn-
hen Komplex Γ, der in eine Kette von unzerlegbaren Komplexen zer-
lt. Nach den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen kann man
e Richtigkeit des folgenden Satzes vermuten:

Satz 17. *Ist der Matrizenkomplex A zu zwei verschiedenen in un-
legbare Komplexe zerfallenden Komplexen Γ_1 und Γ_2 ähnlich, so stimmt
Γ_1 und Γ_2 die Anzahl der Komponenten überein, und bei geeigneter
umerierung sind entsprechende Komponenten ähnlich.*

Um die Richtigkeit von Satz 17 nachzuweisen, *ordnen wir dem
atrizenkomplex A einen Gruppenkomplex $\mathfrak{G} = \{G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\}$ in genau
r gleichen Weise zu, wie wir in § 7 einer Einzelmatrix eine Einzel-
uppe zuordneten. Es sei $G^{(i)}$ eine zu $A^{(i)}$ gehörige Gruppe und ins-
sondere $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)})$ eine zu $A^{(i)}$ gehörige Basis von $G^{(i)}$. Wir
hren dann n „Komplexelemente“ $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ durch die Gleichungen
$= \{y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots\}$ ein, und betrachten den Komplex $\mathfrak{G}$, der aus der
esamtheit der linearen Verbindungen von $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ mit Koeffizienten
us $\mathfrak{R}$ besteht. Dabei ist Multiplikation mit Körperelementen und
ddition von Komplexelementen durch die Gleichungen*

$$a \cdot \mathfrak{y} = \{a \cdot y^{(1)}, a \cdot y^{(2)}, \ldots\}; \quad \mathfrak{y} + \mathfrak{y}' = \{y^{(1)} + y^{(1)\prime}, y^{(2)} + y^{(2)\prime}, \ldots\}$$

*finiert und zwei Komplexelemente $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$ gelten dann und nur dann
s gleich, wenn für jedes i die entsprechenden Glieder $y^{(i)}$ und $y^{(i)\prime}$ iden-
sch sind.* — Unter diesen Voraussetzungen ist ein Komplexelement durch
des seiner Glieder eindeutig bestimmt, *insbesondere ist $\mathfrak{y}$ gleich dem
ullelement $\{0, 0, \ldots\}$ des Komplexes, falls für irgendein i sein i-tes Glied
eich Null ist.* Diese Tatsache ist für das Rechnen mit Komplexelementen
n grundlegender Bedeutung; man kann mit ihrer Hilfe mit Gruppen-
mplexen genau so arbeiten, wie wir es früher mit Einzelgruppen taten.

Wir definieren zunächst: *Die Elemente $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_m$ $(m \leqq n)$ bilden
nen Unterkomplex $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{G}$, falls für jedes i die Elemente $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$
ne Basis einer Untergruppe von $G^{(i)}$ darstellen.* Sind dabei die Ele-
ente $\mathfrak{y}_i$ linear unabhängig, besitzt, wie wir sagen wollen, $\mathfrak{G}_1$ den Rang
, so besitzt auch jede der Gruppen $G_1^{(i)}$ den Rang m.

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß ein Komplex-
ement verschwinden muß, falls eines seiner Glieder verschwindet; wäre
$_1^{(i)}$ eine Gruppe von niedrigerem als m-ten Rang, bestände also eine
leichung $\sum_{k=1}^{m} a_k y_k^{(i)} = 0$, so müßte auch $\sum_{k=1}^{m} a_k \mathfrak{y}_k = 0$ sein entgegen der vor-
ıgesetzten linearen Unabhängigkeit der Elemente $\mathfrak{y}_k$.

Wir definieren jetzt weiter: *Unter der Summe* $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r)$ (*de*
Durchschnitt $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r]$) *der r Komplexe* $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r$ *verstehe*
wir die Gesamtheit aller Elemente der Form $\sum_k \mathfrak{y}_k$, *wobei* $\mathfrak{y}_k$ *ein beliebig*
Element aus $\mathfrak{G}_k$ *bedeutet (die Gesamtheit aller in* $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ *gleic*
zeitig auftretenden Elemente).

Summe und Durchschnitt sind Komplexe, und zwar besitzt $(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}$
$([\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_r])$ den Rang m, wenn für irgendein beliebiges i die Sum
(der Durchschnitt) der Gruppen $G_1^{(i)}, \ldots, G_r^{(i)}$ vom Range m ist. D
Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsach
daß unter unseren Voraussetzungen jedenfalls die i-ten Glieder einer Ba
von $(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_r)$ $([\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_r])$ eine Basis von

$$(G_1^{(i)}, \ldots, G_r^{(i)}) \quad ([G_1^{(i)}, \ldots, G_r^{(i)}])$$

bilden, und aus dem, was wir oben über den Rang eines Komplex
bemerkten.

Wir können nun nach dem Schema, das wir eben an dem Begri
des Unterkomplexes, des Summen- und des Durchschnittkomplexes da
legten, in genauer Analogie mit den Entwicklungen von § 1 *den Begriff*
direkten Summe zweier Komplexe, den Begriff des Komponenten-, sowie
Restklassenkomplexes einführen. Auch die Zerlegbarkeit eines Komplexes w
den wir in genau der gleichen Weise wie bei einer Einzelgruppe definier

Dabei kommt man zu Sätzen wie dem folgenden: Ist $\mathfrak{G}$ ein beliebi
Unterkomplex von $((\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2))$ und bedeutet $\mathfrak{G}_k^{(\mathfrak{G})}$ die $\mathfrak{G}_k$-Komponente v
$\mathfrak{G}_k$ $(k = 1, 2)$ und bezeichnet man mit $G^{(i)}, G_1^{(i)}, G_2^{(i)}$ das i-te Glied v
$\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ [41]), so stellt das i-te Glied von $\mathfrak{G}_k^{(\mathfrak{G})}$ die $G_k^{(i)}$-Kompone
von $G^{(i)}$ dar und besitzt gleichen Rang wie $\mathfrak{G}_k^{(\mathfrak{G})}$.

Man sieht, die Theorie der Komplexe läßt sich in ganz derselb
Weise entwickeln, wie die der Einzelgruppen. Es ist nur noch über
Isomorphiebegriff einiges zu sagen:

Zwei Komplexe $\mathfrak{G} = \{G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\}$ *und* $\mathfrak{G}' = \{G_1^{(1)'}, G_2^{(2)'}, \ldots\}$ *heiß*
isomorph, wenn sich eine Basis $\mathfrak{y}_k = \{y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots\}$ *von* $\mathfrak{G}$ *und e*
Basis $\mathfrak{y}_k = \{y_k^{(1)'}, y_k^{(2)'}, \ldots\}$ *von* $\mathfrak{G}'$ *so bestimmen läßt, daß durch*
Zuordnung von $y_k^{(i)}$ *und* $y_k^{(i)'}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots)$ *zwischen je*
der Gruppen $G^{(i)}$ *und* $G^{(i)'}$ *eine isomorphe Beziehung hergestellt wird.*

Um einzusehen, daß sich mit der so eingeführten Komplexisomorp
in derselben Weise arbeiten läßt wie früher mit der Gruppenisomorph
braucht man nur zu bedenken, daß sich der grundlegende Satz 1 unmit
bar auf Komplexe übertragen läßt.

---

[41]) D. h. die Gruppe, die aus den i-ten Gliedern der Elemente von $\mathfrak{G}$ usw. best

Das ist in der Tat der Fall: Es sei nämlich $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe
n $((\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2))$ und es sei $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2] = 0$. Bedeutet nun $\mathfrak{y}_k = \{y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots\}$
$= 1, 2, \ldots, m$) eine Basis von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{y}_k' = \{y_k^{(1)'}, y_k^{(2)'}, \ldots\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$
e solche von $\mathfrak{G}_1^{(\mathfrak{G})}$, und ist allgemein $\mathfrak{y}_k = \mathfrak{y}_k' + \mathfrak{y}_k''$, wobei $\mathfrak{y}_k''$ ein Ele-
nt aus $\mathfrak{G}_2$ darstellt, so erhält man infolge von Satz 1 zwischen dem
en Glied von $\mathfrak{G}$ und dem i-ten Glied von $\mathfrak{G}_1^{(\mathfrak{G})}$ eine isomorphe Zuordnung,
nn man allgemein $y_k^{(i)}$ und $y_k^{(i)'}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ einander zuordnet. Daraus
ibt sich aber nach der oben formulierten Isomorphiedefinition, daß
ischen den Komplexen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1^{(\mathfrak{G})}$ ein Isomorphismus hergestellt wird,
nn man $\mathfrak{y}_k$ und $\mathfrak{y}_k'$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ aufeinander bezieht.

Man sieht, daß man allgemein die Schlüsse der ersten vier Para-
phen ohne Schwierigkeit von Gruppen auf Komplexe übertragen kann.
r dürfen daher sofort den Satz aussprechen:

Satz 18. *Der Fundamentalsatz bleibt richtig, wenn man überall Stelle von „Gruppe" das Wort „Komplex" einsetzt.*

Mit Satz 18 ist auch Satz 17 bewiesen, wie man durch ähnliche
erlegungen, wie sie in § 7 angewendet wurden, leicht einsieht. Zunächst
nn jedem Matrizenkomplex $A = \{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots\}$ ein Gruppenkomplex
$= \{G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\}$ zugeordnet werden, und zwar eine ganz bestimmte
sis $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ dieses Komplexes. Geht man durch eine Trans-
mation $(\mathfrak{y}) = P \cdot (\mathfrak{y}')$ zu einer neuen Basis von $\mathfrak{G}$ über, so entspricht
m der Übergang von A zu dem ähnlichen Komplexe

$$P^{-1}AP = \{P^{-1}A^{(1)}P, P^{-1}A^{(2)}P \ldots\}.$$

ist also jedem Gruppenkomplex eine Klasse ähnlicher Matrizenkom-
xe zugeordnet, und daraus folgt angesichts der für Gruppenkomplexe
ltigen Isomorphiedefinition leicht: *Zwei Gruppenkomplexe sind dann
d nur dann isomorph, wenn ihnen dieselbe Klasse ähnlicher Matrizen-
mplexe zugeordnet ist.*

Man braucht jetzt nur noch zu bedenken, daß infolge der Zerlegbar-
itsdefinition bei Matrizen- und Gruppenkomplexen einem zerlegbaren
uppenkomplex eine Klasse zerlegbarer Matrizenkomplexe zugeordnet ist
d umgekehrt, dann erkennt man unmittelbar die Richtigkeit von Satz 17.
mit ist wieder ein Resultat gewonnen, das bisher nur im Falle der
llständigen Reduzibilität des gegebenen Matrizenkomplexes bekannt war[42]).
n besonderem Interesse dürfte unser Ergebnis dann sein, wenn es sich
ht um einen beliebigen Matrizenkomplex, sondern um eine gewöhnliche
uppe von Matrizen, etwa um die Monodromiegruppe, oder die Picard-
ssiotsche Gruppe einer Differentialgleichung handelt.

[42]) Vgl. L. I, § 6, S. 28 ff.

Zusatz bei der Korrektur. Der Beweis des grundlegenden Satzes 1 von § 6 läßt sich im Anschluß an Satz 9 sehr einfach folgendermaß führen: Die ganzen Schlüsse des § 5, die wir von den Darstellung $G = ((A, B)) = ((C_1, C_2))$ ausgehend auf B angewandt haben, lassen si in gleicher Weise bei A durchführen. *Wir finden also auch für A ei direkte Summenzerlegung* $A = ((E_1, E_2, U))$. Ist nun A weder zu sein C_1- noch zu seiner C_2-Komponente isomorph, so haben wir nach Satz $[A, C_1] \neq 0$; $[A, C_2] \neq 0$, also nach Definition der Endlichkeitsunte gruppen: $E_1 \neq 0$; $E_2 \neq 0$. Es ist mithin A notwendig zerlegbar, falls weder zu seiner C_1- noch zu seiner C_2-Komponente isomorph ist.

Durch diese einfachen Betrachtungen, die mir E. Noether zwec nachträglicher Beifügung zur Arbeit mitteilte, läßt sich der ganze u ständliche Satz 10, sowie der auf Satz 10 gegründete Beweis von Satz ersparen. Ja, es wäre sogar nicht einmal der volle Satz 9 nötig, sonde es genügte zum Beweise von Satz 11 der Nachweis, daß für A eine direk Summenzerlegung $A = ((E_1, A_1))$ existiert, bei der E_2 eine Untergrup von A_1 ist. Doch ist die Gültigkeit einer Gleichung $A = ((E_1, E_2, U$ wohl an und für sich von Interesse.

Freiburg i. Br., 21. Januar 1925.

(Eingegangen am 14. Dezember 1923.)

Sur une équation différentielle du premier ordre.

Par

M. Lavrentieff à Moscou.

Le but de cette Note est de construire une fonction $f(x, y)$ continue r rapport à l'ensemble des variables x et y dans le carré $(0, 0)$; 0); $(1, 1)$; $(0, 1)$ et telle que pour tout point x_0, y_0 $(0 < x_0 < 1$, $< y_0 < 1)$ il existe au moins deux courbes intégrales de l'équation férentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

ssant par ce point et distinctes dans un domaine aussi petit que l'on ut autour du point x_0, y_0.

Il parait que l'existence des équations ayant la propriété indiquée n'a pas core été démontrée. Je dois mentionner ici une Note de M. Tamarkine[1]), l'auteur montre que pour toute fonction $f(x, y)$ vérifiant une certaine ndition il existe au moins deux courbes intégrales de l'équation différentielle (1) passant par l'origine des coordonnées. Voici cette condition:

„On peut trouver une fonction continue positive croissante $\psi(u)$ qui ssède les propriétés suivantes:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \geqq \psi(|y_2 - y_1|), \qquad (\psi(0) = 0) \tag{2}$$

ns le rectangle $R_1(\pm a_1, \pm b_1)$; l'intégrale

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\psi(u)}$$

t convergente pour $u = 0$."

[1]) „Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires", th. Zeitschr. 16 (3./4.), S. 207–213.

Pour la démonstration de son théorème M. Tamarkine ne se se au fond que de la condition suivante:

$$(12') \qquad |f(x,y)-f[x,\varphi(x)]| \geqq \psi(|y-\varphi(x)|),$$

$y=\varphi(x)$ étant une courbe intégrale de l'équation (1) passant par l'origi

Il est aisé de voir qu'il existe en effet une infinité de fonctio continues $f(x,y)$, vérifiant la condition (12'). On voit ainsi qu'il exis une classe de fonctions continues $f(x,y)$ telles qu'au moins deux cour intégrales distinctes de l'équation (1) passent par l'origine.

Il suit aussi de la condition (12') qu'il existe pour tout point de courbe $y=\varphi(x)$ au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équ tion (1) passant par ce point.

On pourrait comprendre l'énoncé de M. Tamarkine dans le s qu'il s'agit d'une fonction $f(x,y)$ vérifiant la condition (12) pour t couple de nombres y_1, y_2; $b_1 \leqq y_1 \leqq b_2$; $b_1 \leqq y_2 \leqq b_2$. Dans ce cas, déduirait de la démonstration du théorème, que si une fonction $f(x,$ vérifie la condition (12) il existe pour tout point du rectangle R_1 moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) passant par point. Mais on peut démontrer qu'il n'existe pas de fonctions continu $f(x,y)$ vérifiant la condition (12), si l'on tient cette condition dans sens précédemment indiqué.

En effet, considérons la fonction $\chi(y)$ de la variable indépendante $\chi(y)=f(x_0,y)$ $(-a_1<x_0<a_1)$. Il suit d'abord de la condition (12 que la fonction $\chi(y)$ $(0 \leqq y \leqq b_1)$ est toujours croissante ou toujo décroissante. En effet, dans le cas contraire on pourrait indiquer de nombres y_1 et y_2, $0 \leqq y_1 < y_2 \leqq b_1$ tels que $f(x_0,y_2)=f(x_0,y_1)$ ce contredit à l'hypothèse (12) puisque $\psi(|y_2-y_1|)>0$. Deux cas s donc possibles (pour $0 \leqq y \leqq b_1$): a) $\chi(y)$ est croissante; b) $\chi(y)$ est croissante. Considérons le cas a). Soit y_0 un nombre quelcon $0<y_0<b_1$: d'après la condition (12) on a

$$\chi(y_0+h)-\chi(y_0) \geqq \psi(h) \qquad (h>$$

D'autre part, d'après les propriétés de la fonction $\psi(u)$, nous avons

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{h} = +\infty.$$

En effet, supposons que $\limsup_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{h} < M$, mais alors, pour u_0 assez pe

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\psi(u)} > \int_u^{u_0} \frac{du}{Mu} = \frac{1}{M} \lg\left(\frac{u_0}{u}\right).$$

our $u \to 0$ le second membre tendant vers $+\infty$, le premier membre nd donc aussi vers $+\infty$, ce qui contredit à la condition posée.

Il en suit donc

$$\limsup_{h \to 0} \frac{\chi(y_0+h)-\chi(y_0)}{h} = +\infty$$

uelque soit le point y_0, $0 < y_0 < b_1$.

On voit ainsi que la fonction continue $\chi(y)$ a en chaque point de intervalle $(0, b_1)$ le nombre dérivé supérieur droit égal à $+\infty$ ce qui 'est pas possible d'après les résultats de M. Denjoy sur les nombres érivés [2]).

Dans le cas b), en raisonnant d'une manière tout à fait analogue n démontre l'existence d'une fonction continue $\chi(y)$ ayant en tout point 'un intervalle $(0, b_1)$ le nombre dérivé inférieur droit égal à $-\infty$, ce ui n'est pas possible en vertu des mêmes résultats de M. Denjoy.

Je passe maintenant à la construction, déjà indiquée d'une fonction (x, y) telle que pour un point quelconque du carré il existe au moins eux courbes intégrales distinctes de l'équation différentielle (1) passant ar ce point.

1. Considérons le carré $O(0, 0)$; $B(1, 0)$; $C(1, 1)$; $D(0, 1)$ dans le lan u, v. Divisons le côté OD par les points $a_1, a_2, \ldots, a_{8k-1}$ en $8k$ arties égales et joignons es points de division $_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2\nu}, \ldots,$ $_{8k-2}$ evec le point $(1, \frac{1}{2})$, les points $_3, a_7, \ldots, a_{4\nu-1}, \ldots,$ $_{8k-1}$ avec le point $(1, \frac{3}{4})$ par des droites. Nous aurons un nombre ni de points d'inter- ection de ces droites ntre elles. Au voisinage e chacun de ces points ous déformons légère- ent les droites qui y boutissent en rempla- ant les bouts de ces roites par des arcs de

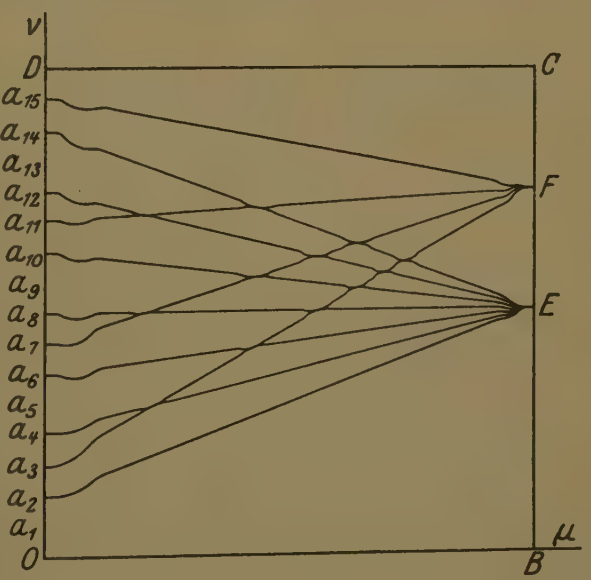


Fig. 1.

[2]) „Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues", Journal des Mathématiques pures et appliquées, 1915, S. 105–240.

courbes continues ayant une même tangente au point considéré. D'autr part nous avons un nombre fini de points communs aux droites considérée et aux segments OD et BC; au voisinage de ces points nous remplaçon les bouts des droites par des arcs de courbes continues, ayant des tangente parallèles à l'axe des u aux points des segments OD et BC (fig. 1). Nou supposons de plus que les conditions suivantes sont vérifiées: 1) Toute les courbes obtenues par les deux déformations indiquées en partant de droites précédentes, possèdent des tangentes en chaque point, 2) $v = \varphi(u$ étant l'équation d'une quelconque de ces courbes, $\varphi'(u)$ est toujours con tinue et l'on a $|\varphi'(u)| < 1$.

2. Considérons le carré $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(0, 1)$ dans le plan ξ, Divisons ce carré par les droites $\xi = \frac{1}{2}$, $\xi = \frac{1}{4}$, ..., $\xi = \frac{1}{2^n}$, ... en un infinité dénombrable de rectangles

$$R_n = \left\{\left(\frac{1}{2^n}, 0\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 1\right); \left(\frac{1}{2^n}, 1\right)\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Divisons le rectangle R_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ par des droites parallèl à l'axe des ξ en $2^n n!$ rectangles égaux, les désignant par $R_{n,}$ $p = 1, 2, 3, \ldots, 2^n n!$

$$R_{n,p} = \left\{\left(\frac{1}{2^n}, \frac{p-1}{2^n n!}\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{p-1}{2^n n!}\right); \left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{p}{2^n n!}\right); \left(\frac{1}{2^n}, \frac{p}{2^n n!}\right)\right\}.$$

Etablissons entre les points du rectangle $R_{n,p}$ et les points de car considéré dans le § 1 la correspondance suivante

$$(1) \qquad \xi = \frac{u}{2^n} + \frac{1}{2^n}; \quad \eta = \frac{v}{2^n n!} + \frac{p-1}{2^n n!}.$$

En posant $k = n + 1$, on voit de suite qu'à toutes les courb $v = \varphi(u)$ construites dans le carré du plan u, v correspondent, d'apr (1), des courbes continues dans le rectangle $R_{n,p}$ du plan ξ, η: $\eta = \overline{\varphi}($ et l'on a $|\overline{\varphi}'(\xi)| < \frac{2^n}{2^n n!} = \frac{1}{n!}$.

En posant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$ et, respectivemen $p = 1, 2, 3, \ldots, 2^n n!$, nous aurons dans tout rectangle $R_{n,p}$ un nomb fini d'arcs de courbes continues; nous aurons donc dans le carré considé un système d'arcs de courbes continues. Ajoutons à ce système les côt des rectangles $R_{n,p}$ parallèles à l'axe ξ. Considérons un arc d'une cour quelconque du système ainsi complété. Il est aisé de voir que l'extr mité gauche d'un tel arc contenu dans le rectangle $R_{n,p}$ est en mêr temps l'extrémité droite de certains arcs de courbes, contenus dans R_{n}

ig. 2). Donc en suivant un chemin le long d'un arc quelconque d'une ourbe du rectangle R_1 on peut passer à un arc de courbe du rectangle et ainsi de suite, en suivant toujours une courbe continue construite, it $\eta = \psi(\xi)$, et il est clair que la fonction $\psi'(\xi)$ est aussi continue.

Désignons par S le système de toutes les courbes ainsi construites. 'après la construction même de S nous déduisons immédiatement les ropriétés suivantes de ce système:

1) Quelle que soit la courbe $\eta = \psi(\xi)$ appartenant à S nous avons $|\psi'(\xi)| < \frac{1}{n!}$ pour $\xi \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2) Si deux courbes du système ont un point commun, ils ont la ême tangente en ce oint.

3) Quelle que soit droite $\xi = a$, $a \neq 0$, ous avons toujours sur tte droite un nombre ni de points des cour- es du système S.

4) Quelle que soit aire fermée, n'ayant pas e points sur l'axe des η, le contient au plus un ombre fini de points de amification du système e courbes considérées.

Nous allons démon- er encore la propriété uivante.

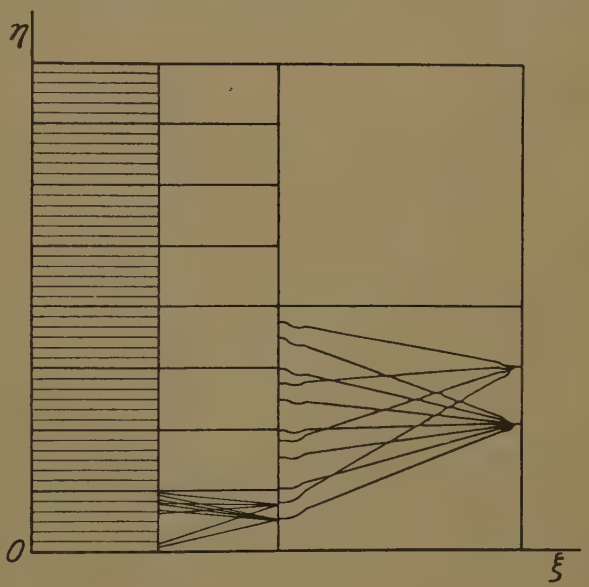


Fig. 2.

5) Quel que soit le oint $0 \leqq \eta_0 \leqq 1$ de l'axe des η il existe au moins deux courbes du système S assant par le point η_0 et ne coïncidant dans aucun intervalle.

En effet, soit

2) $$R_{1,p_1},\ R_{2,p_2},\ \ldots,\ R_{n,p_n},\ \ldots$$

a suite des rectangles, qui contiennent des segments de la droite $\eta = \eta_0$. On voit aisément que le côté droit du rectangle R_{n,p_n} est situé sur le ôté gauche du rectangle $R_{n-1,p_{n-1}}$. De plus sur l'axe des η le point η_0 st la limite unique pour tous les points de l'aire formée par la réunion es rectangles de la suite (2). Il suit de cette remarque et de la con- truction du système S qu'il existe au moins deux courbes du système S,

joignant la droite $\xi = 0$ à la droite $\xi = 1$, qui sont contenues dans l'air indiquée et ne coïncident dans aucun intervalle. Ce qui prouve l propriété 5).

3. Soient $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$; ...; $y = f_k(x)$ k fonctions, continue ainsi que leurs dérivées du premier ordre, définies pour $a \leqq x \leqq b$ et telle que $0 < f_1(x) < f_2(x) < \ldots < f_k(x) < 1$.

Établissons une correspondance entre les points du rectangle $(0, 0$ $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$; $\left(\frac{1}{2^n}, 1\right)$; $(0, 1)$ du plan ξ, η et les points du rectangle $(a, 0$ $(b, 0)$; $(b, 1)$; $(a, 1)$ situés dans le plan x, y, en posant $h = 2^n(b - a$

$$\begin{aligned} x &= h\xi + a, \\ y &= F(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{3}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} F(\xi,\eta) = (k+1)\eta f_1(h\xi+a) \qquad \left(0 \leqq \eta \leqq \frac{}{k+1}\right. \\ F(\xi,\eta) = (k+1)\left(\eta - \frac{1}{k+1}\right)[f_2(h\xi+a) - f_1(h\xi+a)] + f_1(h\xi - \\ \qquad\qquad \left(\frac{1}{k+1} \leqq \eta \leqq \frac{}{k+1}\right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\xi,\eta) = (k+1)\left(\eta - \frac{p}{k+1}\right)[f_{p+1}(h\xi+a) - f_p(h\xi+a)] + f_p(h\xi \\ \qquad\qquad \left(\frac{p}{k+1} \leqq \eta \leqq \frac{p+1}{k+1}\right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\xi,\eta) = (k+1)\left(\eta - \frac{k}{k+1}\right)[1 - f_k(h\xi+a)] + f_k(h\xi+a) \\ \qquad\qquad \left(\frac{k}{k+1} \leqq \eta \leqq 1\right. \end{array}\right. \tag{4}$$

Cette correspondance est évidemment biunivoque et bicontinue. Elle jou de plus d'une propriété importante que nous allons indiquer.

Soient $\eta = \varphi(\xi)$ et $\eta = \psi(\xi)$ deux fonctions continues ainsi qu leurs dérivées du premier ordre et telles que pour $\xi = \xi_0$, $0 < \xi_0 < \frac{}{2}$ on a: $0 < \varphi(\xi_0) < 1$; $0 < \psi(\xi_0) < 1$; $\varphi(\xi_0) = \psi(\xi_0)$ et $|\varphi'(\xi_0) - \psi'(\xi_0)| <$ Considérons les courbes dans le plan x, y correspondant aux courb $\eta = \varphi(\xi)$ et $\eta = \psi(\xi)$ du plan ξ, η:

$$y = F\left[\frac{x-a}{h}, \varphi\left(\frac{x-a}{h}\right)\right] = \overline{\varphi}(x),$$

$$y = F\left[\frac{x-a}{h}, \psi\left(\frac{x-a}{h}\right)\right] = \overline{\psi}(x).$$

n posant $x_0 = h\xi_0 + a$, nous avons, si

$$\varphi(\xi_0) \neq \frac{p}{k+1} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, k+1)$$

$$\bar{\varphi}'(x_0) = \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\varphi(\xi_0)}} \cdot \frac{1}{h} + \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\varphi(\xi_0)}} \cdot \varphi'(\xi_0) \cdot \frac{1}{h},$$

$$\bar{\psi}'(x_0) = \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\psi(\xi_0)}} \cdot \frac{1}{h} + \left(\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\psi(\xi_0)}} \cdot \psi'(\xi_0) \cdot \frac{1}{h}.$$

'autre part, d'après (4), nous avons

$$\left|\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right| \leqq k+1$$

onc

5) $$|\bar{\varphi}'(x_0) - \bar{\psi}'(x_0)| \leqq \frac{k+1}{h}|\varphi'(\xi_0) - \psi'(\xi_0)| < \frac{(k+1)\varepsilon}{h} = \frac{(k+1)\varepsilon}{2^n(b-a)}.$$

Il suit immédiatement de la formule (5): si l'on a dans le plan ξ, η eux courbes qui se touchent en un point

$$\xi_0, \eta_0 \left(0 < \xi_0 < \frac{1}{2^n},\ 0 < \eta_0 < 1,\ \eta_0 + \frac{p}{k+1}\right)$$

t dont la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des η, les courbes orrespondantes dans le plan x, y sont aussi tangentes au point correspondant au point ξ_0, η_0.

4. Soient $y = f_1^*(x)$ et $y = f_2^*(x)$ deux fonctions continues ainsi ue leurs dérivées du premier ordre définies pour $a \leqq x \leqq b$ et telles que $\leqq f_1^*(x) \leqq f_2^*(x)$. Construisons une famille de courbes de la manière uivante

$$y = \theta[f_2^*(x) - f_1^*(x)] + f_1^*(x) = \Phi(x, \theta) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Quelle que soit la valeur de $\theta = \theta_0$, nous avons

$$f_1^*(x) \leqq \Phi(x, \theta_0) \leqq f_2^*(x),$$

$$\frac{\partial \Phi(x, \theta_0)}{\partial x} = \theta[f_2^{*\prime}(x) - f_1^{*\prime}(x)] + f_1^{*\prime}(x),$$

lonc la valeur de $\frac{\partial \Phi(x, \theta_0)}{\partial x}$ est toujours comprise entre les valeurs de $f_1^{*\prime}(x)$ et $f_2^{*\prime}(x)$.

Il est aisé de voir que pour obtenir toutes les courbes de la famille $\Phi(x,\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 1$, dans le cas $f_1^*(x) < f_2^*(x)$ il suffit de poser $k = 2$, $_1(x) = f_1^*(x)$, $f_2(x) = f_2^*(x)$ dans la correspondance entre les plans ξ, η et x, y définie au § 3; les courbes $\Phi(x, \theta)$ corresponderont alors aux droites $\eta = c$ telles que $\frac{1}{8} \leqq c \leqq \frac{2}{8}$.

5. Construisons dans le carré $A\,(0,0);\ (1,0);\ (1,1);\ (0,1)$ du plan x, y le système S du § 2. D'après les propriétés indiquées de ce système, les courbes du système S divisent le carré considéré en une infinité dénombrable d'aires telles que chacune d'elles est limitée par deux courbes du système S et, certaines d'entre elles, encore par un segment de la droite $x = 1$. Construisons dans chacune des aires considérées une famille de courbes de la manière suivante: supposons qu'une telle aire est limitée par les courbes $y = \tilde{f}_1^*(x)$ et $y = \tilde{f}_2^*(x)$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $\tilde{f}_1^*(x) \leqq \tilde{f}_2^*(x)$; la famille cherchée sera la famille $\Phi(x, \theta)$ construite dans le § 4, en posant $a = x_1$; $b = x_2$; $f_1^*(x) = \tilde{f}_1^*(x)$ et $f_2^*(x) = \tilde{f}_2^*(x)$. Designons par F la réunion de toutes ces familles. D'après le § 4 et les propriétés du système S, nous avons les propriétés suivantes de la famille F:

1) Quelle que soit la courbe de la famille F, $y = f(x)$, on a $|f'(x)| < \frac{1}{n}$ pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2) Si plusieurs courbes de la famille F passent par un même point elles ont toutes en ce point la même tangente.

3) À tout point x_0, y_0 du carré consideré et à tout nombre positif ε il correspond toujours un nombre positif ϱ et un nombre A tels qu'en tout point x, y de la courbe de la famille F, $y = f(x)$, intérieur au cercle de rayon ϱ et de centre x_0, y_0 on a $A - \varepsilon < f'(x) < A + \varepsilon$.

6. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ tous les nombres rationnels contenus entre 0 et 1 et soit r_{n_1} le premier nombre satisfaisant à l'inégalité $|r_1 - r_{n_1}| < \ldots$ et tel que tout point de la droite $x = r_{n_1}$ n'est pas un point de ramification des courbes du système S; un tel nombre existe d'après la propriété 4) du système S. Par la même raison il existe un rectangle $A_1\,(r_{n_1}, 0);\ (r_{n_1} + m_1, 0);\ (r_{n_1} + m_1, 1);\ (r_{n_1}, 1)$, $m_1 > 0$, qui ne contient pas de points de ramification du système S. Donc, dans le rectangle A_1 nous avons un nombre fini, soit k_1, de courbes du système S, deux à deux sans points communs. Soit $y = \varphi_1(x);\ y = \varphi_2(x); \ldots; y = \varphi_{k_1}(x)$ les équations de ces courbes. Soit p_1 le plus petit nombre entier satisfaisant aux inégalités $p_1 > k_1 + 1$ et $2^{p_1} > \frac{k_1 + 1}{m_1}$. Construisons dans le rectangle A_1 toutes les courbes qui correspondent aux courbes du système S dans le rectangle $(0,0);\ \left(\frac{1}{2^{p_1}}, 0\right), \left(\frac{1}{2^{p_1}}, 1\right);\ (0,1)$ du plan ξ, η (§ 2) par la correspondance considérée au § 3 en posant $a = r_{n_1}$, $b = r_{n_1} + m_1$, $k = k_1$, $f_1(x) \equiv \varphi_1(x)$; $f_2(x) \equiv \varphi_2(x)$; $\ldots$; $f_k(x) \equiv \varphi_{k_1}(x)$. Nous avons donc dans le corré un nouveau système, soit S_1, de courbes continues

'après les propriétés du système S et le caractère de la correspondance nsidérée au § 3 nous avons les propriétés suivantes du système S_1:

1) Quelle que soit la courbe du système S_1, $y = \psi(x)$, et la urbe de la famille F, $y = \varphi(x)$, avec $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, nous avons $|\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)| < \frac{1}{p_1!}$.

En effet la courbe $y = \psi(x)$ du plan x, y correspond à une certaine urbe $\eta = \overline{\psi}(\xi)$ du système S dans le plan ξ, η. D'autre part en vertu la remarque à la fin du § 4, la courbe $y = \varphi(x)$ dans le plan x, y rrespond à une droite $\eta = c$ du plan ξ, η. Mais d'après la propriété 1) u système S pour $\xi < \frac{1}{2^{p_1}}$ on a $|\overline{\psi}'(\xi)| < \frac{1}{p_1!}$. Il s'en suit, d'après la rmule (5) du § 3

$$|\psi'(x_0) - \varphi'(x_0)| < \frac{(k_1+1)\frac{1}{p_1!}}{2^{p_1} m_1} = \frac{1}{p_1!}\,\frac{k_1+1}{m_1 2^{p_1}} < \frac{1}{p_1!}.$$

2) Si deux courbes du système S_1 ont un point commun, ils ont la ême tangente en ce point.

3) Quelle que soit la droite $x = a$, $a \neq 0$ et $a \neq r_{n_1}$, nous avons tou- urs sur cette droite un nombre fini de points des courbes du système S_1.

4) Quelle que soit l'aire fermée n'ayant pas de points sur les droites $= 0$ et $x = r_{n_1}$, il-y-a au plus un nombre fini de points de ramification es courbes du système S_1.

5) Quel que soit le point P de la droite $x = 0$ ou $x = r_{n_1}$, il existe ujours au moins deux courbes du système S_1 passant par le point P et e coïncidant dans aucun intervalle.

Les courbes du système S_1 étant construites, en appliquant le procédé u § 5 nous construirons les courbes d'une famille F_1, ayant les pro- riétés suivantes:

1) Quelle que soit la courbe de la famille F_1, $y = \varphi_1(x)$, et la ourbe de la famille F, $y = \varphi(x)$, avec $\varphi(x_0) = \varphi_1(x_0)$, nous avons $|\varphi_1'(x_0) - \varphi'(x_0)| < \frac{1}{p_1!}$.

On démontre cette propriété par un raisonnement analogue à celui ue nous avons fait pour démontrer la propriété 1) du système S_1.

2) Si plusieurs courbes de la famille F_1 passent par un point, elles nt en ce point la même tangente.

3) La propriété 3) de la famille F.

Supposons qu'on peut construire les systèmes S_ν et les familles F_ν $\nu = 1, 2, 3, \ldots, \lambda$) ayant les propiétés suivantes:

Le système S_ν:

1) Quelle que soit la courbe $y=\psi(x)$ du système S_ν et la courbe $y=\varphi(x)$ de la famille $F_{\nu-1}$, telles que $\psi(x_0)=\varphi(x_0)$, on a $|\psi'(x_0)-\varphi'(x_0|<\frac{1}{p_\nu!}$.

2) Si deux courbes du système S_ν ont un point commun, elles ont la même tangente en ce point.

3) Quelle que soit la droite $x=a$, $a\neq 0$, $a\neq r_{n_1}$, $a\neq r_{n_2}$, $\ldots$, $a\neq r_{n_\nu}$, nous avons toujours sur cette droite un nombre fini de points des courbes du système S_ν.

4) Quelle que soit l'aire fermée, n'ayant pas de points sur les droites $x=0$, $x=r_{n_1}$, $x=r_{n_2}$, $\ldots$, $x=r_{n_\nu}$, il-y-a au plus un nombre fini de points de ramification des courbes du système S_ν.

5) Quel que soit le point P de la droite $x=0$, ou $x=r_{n_1}$, ou $x=r_{n_2}$, $\ldots$, ou $x=r_{n_\nu}$, il existe toujours au moins deux courbes du système S_ν passant par le point P et ne coïncidant dans aucun intervalle.

La famille F_ν:

1) Quelque soit la courbe de la famille F_ν, $y=\varphi(x)$, et la courbe de la famille $F_{\nu-1}$, $y=\psi(x)$, telles que $\psi(x_0)=\varphi(x_0)$, nous avons $|\psi'(x_0)-\varphi'(x_0)|<\frac{1}{p_\nu!}$.

2) Si plusieurs courbes de la famille F_ν passent par un point, elles ont en ce point la même tangente.

3) La propriété 3) de la famille F.

Construisons le système $S_{\lambda+1}$ et la famille $F_{\lambda+1}$. Soit $r_{n_{\lambda+1}}$, $n_{\lambda+1}>n_\lambda$ le premier nombre rationnel satisfaisant à l'inégalité $|r_{\lambda+1}-r_{n_{\lambda+1}}|<\frac{1}{2^{\lambda+1}}$ et tel que tout point de la droite $x=r_{n_{\lambda+1}}$ n'est pas un point de ramification des courbes du système S_λ, un tel nombre existant d'après la propriété 4) du système S_λ. Par la même raison il existe un rectangle $A_{\lambda+1}(r_{n_{\lambda+1}},0)$; $(r_{n_{\lambda+1}}+m_{\lambda+1},0)$; $(r_{n_{\lambda+1}}+m_{\lambda+1},1)$; $(r_{n_{\lambda+1}},1)$. $m_{\lambda+1}>0$ qui ne contient pas des points de ramification du système S_λ. Donc d'après la propriété 3) du système S_λ, dans le rectangle $A_{\lambda+1}$ nous avons un nombre fini, soit $k_{\lambda+1}$, de courbes du système S_λ, deux à deux sans points communs. Soient $y=\varphi_1^{(\lambda)}(x)$; $y=\varphi_2^{(\lambda)}(x)$; $\ldots$; $y=\varphi_{k_{\lambda+1}}^{(\lambda)}(x)$ les équations de ces courbes. Soit $p_{\lambda+1}$ le plus petit nombre entier satisfaisant aux inégalités: $p_{\lambda+1}>p_\lambda$, $p_{\lambda+1}>k_{\lambda+1}+1$ et $2^{p_{\lambda+1}}>\frac{k_{\lambda+1}+}{m_{\lambda+1}}$. Construisons dans le rectangle $A_{\lambda+1}$ toutes les courbes qui correspondent aux courbes du système S dans le rectangle $(0,0)$; $\left(\frac{1}{2^{p_{\lambda+1}}},0\right)$; $\left(\frac{1}{2^{p_{\lambda+1}}},1\right)$ $(0,1)$ du plan ξ, η (§ 2) par la correspondance considérée au §

posant $a = r_{n_{\lambda+1}}$, $b = r_{n_{\lambda+1}} + m_{\lambda+1}$, $k = k_{\lambda+1}$ et $f_1(x) \equiv \varphi_1^{(\lambda)}(x)$; $(x) \equiv \varphi_2^{(\lambda)}(x)$; ...; $f_k(x) \equiv \varphi_{k_{\lambda+1}}^{(\lambda)}(x)$. Les courbes construites et les urbes du système S_λ forment le système $S_{\lambda+1}$. Le système $S_{\lambda+1}$ étant nstruit, en appliquant un procédé tout analogue au procédé du § 5, us construirons les courbes d'une famille $F_{\lambda+1}$. Il est facile de démontrer que le système $S_{\lambda+1}$ et la famille $F_{\lambda+1}$ ont des propriétés respectivement indiquées pour le système S_ν et pour la famille F_ν; pour les obtenir nous devons poser $\nu = \lambda + 1$.

Designons par Σ la réunion des courbes de tous les systèmes S_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. D'après les propriétés des systèmes S_ν nous avons immédiatement les propriétés suivantes du système Σ:

1) Quel que soit le point P situé sur la droite $x = r_{n_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ il existe au moins deux courbes du système Σ définies dans l'intervalle $(r_{n_\nu}, r_{n_\nu} + m_\nu)$, passant par le point P et ne coïncidant dans aucun intervalle.

2) Si deux courbes du système Σ ont un point commun, ils ont la même tangente en ce point.

Nous allons démontrer encore la propriété essentielle suivante:

3) La propriété 3) de la famille F.

En effet, soit n le plus petit nombre entier tel que $\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{p_\nu!} < \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons la famille F_n; d'après la propriété 3) de cette famille il correspond au point x_0, y_0 et au nombre positif ε un nombre positif ϱ et un nombre A tels qu'en tout point de la courbe $y = \varphi(x)$ de la famille F_n, intérieur au cercle C de rayon ϱ et de centre x_0, y_0, on a $|A - \varphi'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $y = \psi(x)$ une courbe quelconque du système Σ ayant des points dans le cercle C et soit x_1, y_1 un point quelconque de cette courbe intérieur au cercle C. La courbe $y = \psi(x)$ appartient à un système S_m; deux cas sont possibles: 1° $m \leqq n$, donc la courbe $y = \psi(x)$ appartient à la famille F_n et nous avons $|A - \psi'(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. 2° $m > n$, soit $m = n + p$; soient $y = \varphi_n(x)$; $y = \varphi_{n+1}(x)$; ...; $y = \varphi_{n+p-1}(x)$ les équations des courbes des familles F_n, F_{n+1}, ..., F_{n+p-1} passant par le point x_1, y_1; nous avons $|A - \varphi_n'(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, d'après la propriété 1) des familles F_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ nous avons successivement $|\varphi_n'(x_1) - \varphi_{n+1}'(x_1)| < \frac{1}{p_n!}$; $|\varphi_{n+1}'(x_1) - \varphi_{n+2}'(x)| < \frac{1}{p_{n+1}!}$; ...; $|\varphi_{n+k-2}'(x_1) - \varphi_{n+k-1}'(x_1)| < \frac{1}{p_{n+k-2}!}$ et d'après la propriété 1) des systèmes S_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ nous avons $|\varphi_{n+k-1}'(x_1) - \psi'(x_1)| < \frac{1}{p_{n+k-1}!}$,

donc $|\varphi_n'(x_1) - \psi'(x_1)| < \frac{1}{p_{n!}} + \frac{1}{p_{n+1!}} + \ldots < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $|A - \psi'(x_1)| <$
ce qui prouve la proposition.

7. Soit E l'ensemble des points de toutes les courbes du système Σ, l'ensemble $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_\lambda}, \ldots$ étant partout dense dans l'intervalle $(0,$ de l'axe des x, l'ensemble E est partout dense dans le carré considéré. Construisons dans E la fonction $f_1(x, y)$ de la manière suivante: le point x_0, y_0 étant contenu dans l'ensemble E, nous prenons une courbe quelconque du système Σ passant par ce point, soit $y = \varphi(x)$, et posons $f_1(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$; d'après la propriété 2) du système Σ la fonction $f_1(x_0, y_0)$ ainsi définie est unique. Définissons dans le carré $(0, 0)$; $(0, 1)$ $(1, 1)$; $(1, 0)$ une fonction $f(x, y)$ égale au minimum de $f_1(x, y)$ en tout point x, y du carré, ce qui est possible puisque l'ensemble E est partout dense sur ce carré. D'après la propriété 3) du système Σ la fonction $f(x, y)$ ainsi définie est partout continue.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

D'après la définition de la fonction $f(x, y)$, chaque courbe du système Σ sera une courbe intégrale de l'équation (1), donc, quel que soit le point P situé sur l'une quelconque des droites $x = 0$; $x = r_{n_1}$; $x = r_{n_2}$; $\ldots$; $x = r_\lambda^n$; $\ldots$ il existe au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) passant par ce point P. Nous allons démontrer que pour tout point du carré il existe au moins deux courbes intégrales distinctes passant par ce point. En effet supposons que par un point x_0, y_0 il ne posse qu'une seule courbe intégrale de l'équation (1). Soit C cette courbe. D'autre part, l'ensemble R des points $\{r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_\lambda}, \ldots\}$ est partout dense sur l'intervalle $(0, 1)$; donc quelque petit que soit ε, il existe toujours dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ des points de l'ensemble R; soit r_{n_λ} le premier d'entre eux. Menons par ce point r_{n_λ} la droite $x = r_{n_\lambda}$ et soit (r_{n_λ}, y_1) le point d'intersection de cette droite et de la courbe C. Mais, d'après la propriété 1) du système Σ il existe au moins deux courbes intégrales de l'équation (1) passant par le point (r_{n_λ}, y_1) et distinctes dans tout intervalle $(r_{n_\lambda}, r_{n_\lambda} + \eta)$, $\eta > 0$, pour η assez petit. η étant assez petit l'intervalle $(r_{n_\lambda}, r_{n_\lambda} + \eta)$ est contenu dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Nous allons montrer que c'est impossible. En effet M. Osgood[3]) a démontré le théorème suivant:

---

[3]) „Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung", Monatshefte f. Math. u. Phys. 9 (1898), S. 343.

La fonction $f(x, y)$ étant continue par rapport à l'ensemble des riables x, y; $a_1 < x < a_2$; $b_1 < y < b_2$; il existe pour tout point, $< x_0 < a_2$; $b_1 < y_0 < b_2$, deux courbes intégrales $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ de quation (1) passant par ce point et telles que toute autre courbe inté- ale $y = \varphi(x)$ passant par le même point vérifie les inégalités

$$\varphi_1(x) \leqq \varphi(x) \leqq \varphi_2(x)$$

el que soit x dans un certain intervalle $(x_0 - \varrho,\ x_0 + \varrho)$.

Voici une conséquence de ce théorème: si la courbe C est la seule urbe intégrale de l'équation (1) passant par le point x_0, y_0 on voit que ur un nombre ε assez petit et pour tout point x_2, y_2 $(x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon)$ la courbe C il n'existe aucune courbe intégrale de l'équation (1) passant r le point x_2, y_2 et ne coïncidant pas avec la courbe C dans l'inter- lle $(x_2, x_0 + \varepsilon)$.

Nous voyons donc que la courbe C n'est pas la seule courbe inté- ale de l'équation (1) passant par le point x_0, y_0, contrairement a notre pothèse. Ainsi quel que soit le point du carré (0, 0); (1, 0); (1, 1); (0, 1) existe au moins deux courbes intégrales distinctes de l'équation (1) ssant par ce point, ce qu'il fallait démontrer.

Moscou, 12. VI. 1924.

(Eingegangen am 18. Juli 1924.)

Verallgemeinerung der Gauß-Studyschen Untersuchunge über Dreiflache (Kreisbogendreiecke) auf Vierflache

Von

Hans Falckenberg in Gießen.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit fußt auf der neueren Auffassung von d sphärischen Trigonometrie, für die sich schon bei Gauß[1]) Andeutung finden, deren Gedanken dann von Möbius[2]) aufgenommen, aber erst v E. Study[3]) konsequent durchgeführt worden sind, und die wesentlich dara beruht, daß das sphärische Dreieck so definiert wird, daß seine „Bestimmung stücke" (Winkel und Seiten) als vollständig frei veränderliche Größen a gesehen werden können. Durchweg wird ferner die geometrische Deutu verwertet, die bezüglich des Dreicks F. Klein[4]) und F. Schilling[5]), b züglich des Vierecks W. Ihlenburg[6]) den imaginären Bestimmungsstück gegeben hat, und die eine Erweiterung der Untersuchung auf allgemei *Kreisbogen*-Dreiecke und -Vierecke auf der Kugel gestattet. Da es unserer Betrachtung ausschließlich auf die Bestimmungsstücke selb keineswegs aber auf Gestalt oder Fläche der Kreisbogenpolygone ankom so untersuchen wir direkt die aus drei bzw. vier Ebenen bestehende Fig

[1]) Theoria motus corporum coelestium Nr. 54. Ges. Werke 7, S. 67.

[2]) Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Ges. Werke S. 1 und Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in gr möglicher Allgemeinheit. Ges. Werke 2, S. 71.

[3]) Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Fu tionen, Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Sächs. Gesellschaft Wissenschaften 20 (1893), Nr. 2, S. 85.

[4]) Vgl. etwa: Über die hypergeometrische Funktion, autographierte Vorles Göttingen (1894), neuer Abdruck Leipzig (1906), S. 285 ff.

[5]) Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion, M Ann. 44 (1894), S. 162.

[6]) Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke. Dissert Göttingen 1909.

Dreiflach bzw. Vierflach), durch die das Polygon aus der Kugel ausgehnitten wird, und an der man bei entsprechender Orientierung (orientertes Drei- bzw. Vierflach) seine Bestimmungsstücke in einfachster Weise ufzeigen kann.

Das Ziel der Untersuchung ist der von Study entdeckten Einteilung er Dreiflache in zwei getrennt verlaufende Kontinua (Klassen), die sich nalytisch durch das in den Delambreschen Gleichungen (Formeln der *ulben* Winkel) geltende Vorzeichen unterscheiden, eine entsprechende Einilung der Vierflache gegenüberzustellen. Wenn wir noch die zum Dreiach duale Figur einführen, die wir „Drei*eck*" nennen wollen und für dessen estimmungsstücke wegen der von uns zugrunde gelegten projektiven Cayleyschen) Maßbestimmung auch die Drei*flachs*gleichungen gelten, so elingt es das Vierflach in vier Dreiflache und vier Dreiecke zu zerbalten. Es zeigt sich dann, daß $2^7 = 128$ verschiedene Vorzeichenkombiationen für die Delambreschen Gleichungen dieser acht Figuren eintreten, as zu einer Einteilung der Gesamtheit der Vierflache in 128 getrennt erlaufende Kontinua führt. Wie man sieht, reichen zur analytischen Chakterisierung dieser Kontinua (Klassen) die Delambreschen Gleichungen ir *Drei*flache und *Drei*ecke aus; auch wird sich zeigen, daß man bei der erechnung der Vierflache aus gegebenen Bestimmungsstücken mit den reiflachs- und Dreiecksformeln durchkommt, so daß sich die Aufstellung esonderter Vierflachsgleichungen bis zu einem gewissen Grade erübrigt — urch Division erhält man aus den für die acht Teilfiguren geltenden leichungen neue Vierflachsformeln, bei denen sich eben gerade wegen dieser ivisionen ähnlich wie bei den Neperschen Analogien der Dreiflache die lassenunterschiede verwischen. Wie aber für die *Anwendungen* der sphäschen Trigonometrie die Neperschen Analogien wichtiger sind als die nen prinzipiell überlegenen Delambreschen Gleichungen, so scheinen ir gerade die am Ende des § 5 angegebenen Vierflachsformeln, in denen der Klassenunterschied aufgehoben ist und die auch der Form nach den eperschen Analogien entsprechen, für die praktische Berechnung sphäischer Vierecke nicht ohne Bedeutung zu sein.

In den gruppentheoretischen Betrachtungen der beiden letzten Paraaphen wird die Gruppe von Substitutionen aufgestellt, durch die man ie Bestimmungsstücke eines orientierten Vierflaches in die eines anderen um gleichen nicht orientierten Vierflach gehörigen der gleichen Klasse berführen kann; man erhält zunächst, falls man alle Vierflache, deren ntsprechende Bestimmungsstücke sich nur um ganze Vielfache von 2π nterscheiden, als gleichwertig ansieht, eine endliche Gruppe von 2^{14} Subtitutionen, im anderen Fall aber eine ganz bestimmte unendliche ruppe. —

Zerlegt man — ähnlich, wie es hier beim Vierflach geschieht, — da
n-Flach in Dreiflache und Dreicke, so würde man entsprechend zu eine
Theorie der n-Flache aufsteigen können.

§ 1.

Dreiflach und Dreieck.

Eine aus drei Ebenen, die keine Gerade gemeinschaftlich haben, ihre
drei Schnittlinien („Kanten") und ihrem gemeinschaftlichen Punkt („Sche
tel") bestehende Figur nennen wir „Dreiflach". I
ihm numerieren wir die Kanten in bestimmter Wei
(1, 2, 3) und geben jeder eine Orientierung durc
einen *Drehungssinn* um sie selbst, der sich umkehr
wenn wir die Kante unter Festhaltung des Scheite
um einen gestreckten Winkel (Maßzahl π)[7]) drehe
Dann orientieren wir auch die Ebenen (12, 23, 3
dadurch, daß wir in jeder einen *Umlaufssinn* um d
Scheitel festsetzen, der sich umkehrt, wenn wir die Ebene um eine ihr
beiden Kanten um einen gestreckten Winkel (Maßzahl π)[7]) drehen (Fig. 1a

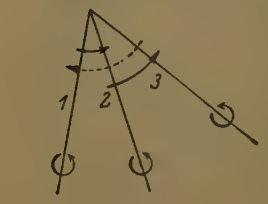


Fig. 1a.

Den Winkel, den die orientierte Achse 1 beschreibt, wenn man a
in der Ebene 12 um den Scheitel unter Berücksichtigung des durch d
Orientierung der Ebene festgelegenen Drehungssinnes dreht, bis sie m
der Achse 2 *auch der Orientierung nach* zusammenfällt, nennen wir d
„Kantenwinkel" a_{12}; entsprechend definieren wir die Kantenwinkel a
und a_{31}.[8])

Analog definieren wir die „Flächenwinkel" α_1, α_2 und α_3 durch Drehung
der orientierten Ebenen um die orientierten Kanten[8]).

Den Inbegriff der sechs auf diese Weise wenigstens bis auf gan
Vielfache von 2π festgelegten Bestimmungsstücke a_{12}, a_{23}, a_{31}; α_1, α_2,
wollen wir „orientiertes Dreiflach" nennen[9]).

In dualistisch entsprechender Weise orientieren wir die aus drei Punkte
ihren Verbindungslinien („Kanten") und ihrer „Grundebene" bestehen
Figur, das „Dreieck", mit Hilfe der *Richtungssinne* der Kanten und d
Umlaufssinne um die Punkte in der Grundebene[7a]) und definieren die E

[7]) D. h. wir weisen dieser Drehung die Maßzahl π zu und treffen auch die Fe
setzungen bezüglich der einzuführenden projektiven Maßbestimmung so, daß die
Operationen die Maßzahl π zugehört.

[8]) Ändert man die Orientierung einer der beiden Kanten, bzw. Ebenen, b
Punkte, so ändert sich das betreffende Bestimmungsstück um π.

[9]) In den Figuren sind der Übersichtlichkeit halber nur die Orientierung
nicht aber die Bestimmungsstücke eingetragen.

[7a]) Dabei wird der Verschiebung eines Punktes auf einer seiner Achsen du
das Unendliche hindurch wieder in sich selbst die Maßzahl π zugewiesen.

immungsstücke („Kantenwinkel" a_{12}, a_{23}, a_{31} und „Eckenentfernungen" $, A_2, A_3$)[8]) des „orientierten Dreiecks" (Fig. 1b)[9]).

Den beiden hier definierten Gebilden ist gemeinschaft-h, daß in ihnen drei gerade Linien (Kanten) auftreten; r fassen beide daher unter dem Namen „*Dreikant*" sammen.

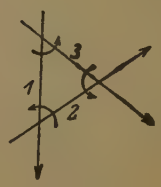


Fig. 1b.

Betrachtet man orientierte Dreikante, deren entrechende Bestimmungsstücke sich nur um ganze Vielche von 2π unterscheiden, als gleichwertig, so gehören, lls man die Numerierung der Kanten als fest gegeben sieht, zu jedem nicht orientierten Dreikant („Kern") $2^6 = 64$ verschiene orientierte entsprechend den sechs Festsetzungen über die Orientieng der Kanten und Ebenen bzw. Punkte. Geht man von den Bestimungsstücken eines bestimmten orientierten Dreikants aus, so erhält man e Bestimmungsstücke aller anderen zum nämlichen Kern gehörenden durch ne Gruppe von 64 Substitutionen, die E. Study angegeben hat[10]).

Zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln eines orientierten Dreichs bestehen die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie[11]), die auch halten bleiben, wenn man, *wie wir es tun wollen*, die Cayleysche Maßstimmung mit der Kugel als Fundamentalfläche zugrunde legt. *Mit ücksicht auf den projektiven Charakter der Maßbestimmung gelten die rmeln dann auch zwischen den Kantenwinkeln und Eckenabständen nes orientierten Dreiecks.*

Läßt man die Fundamentalkugel fest, während die drei Ebenen bzw. unkte alle möglichen Lagen annehmen, so erhält man Bestimmungsstücke, e entweder reell oder bis auf ganze Vielfache von $\pi/2$ rein imaginär sind d die wir sämtlich für unsere Untersuchung zulassen wollen[12]).

Von den einschlägigen Formeln kommen für uns im wesentlichen die osinussätze und die Delambreschen Gleichungen (auch „Sätze der halben inkel", Gaußsche oder Mollweidesche Formeln genannt) in Betracht. ese letzten teilen durch die beiden Möglichkeiten der Vorzeichenfestzung in ihnen, wie ebenfalls E. Study gezeigt hat („*Studyscher itz*"), die Gesamtheit der Dreiflache (bzw. Dreiecke) in zwei Klassen n, derart, daß — wenn man nunmehr Bestimmungsstücke, die sich

[10]) A. a. O. S. 101 ff. — Bezüglich der in diesen Substitutionen auftretenden aßzahl π vgl. oben Anm. [9]) und [7a]).

[11]) Bei unserer Definition der Flächenwinkel erhält man allerdings die Winkel s zugehörigen sphärischen Dreiecks nach der sog. „symmetrischen" Definition, also wesentlichen die *Außenwinkel* der „gewöhnlichen" Definition, wodurch die Forln eine gewisse Änderung erleiden.

[12]) Vgl. etwa Ihlenburg, a. a. O. S. 8.

um ganze Vielfache von 2π unterscheiden, als verschieden ansieht — di sämtlichen Angehörigen einer Klasse *stetig* ineinander übergeführt werde können (ein Kontinuum bilden), während ein *stetiger* Übergang zwische zwei Angehörigen verschiedener Klassen auch durch das Imaginäre hin durch nicht möglich ist (die beiden Kontinua verlaufen getrennt), da sich dagegen ein Übergang zwischen den beiden Kontinuen immer dadurc bewerkstelligen läßt, daß man eines der Bestimmungsstücke eines Dre kantes um eine ungerade ganze Anzahl von Vielfachen von 2π vermehr oder vermindert. Die in den oben erwähnten 64 Substitutionen zunächs noch willkürlichen ganzen Vielfachen von 2π lassen sich nun so wähle daß bei Anwendung dieser Operationen die Vorzeichen in den Delambre schen Gleichungen nicht wechseln, man also in derselben Klasse vo Dreikanten verbleibt. Auch läßt sich diese endliche Gruppe zu einer un endlichen erweitern, die sämtliche Substitutionen enthält, durch die ma von einem orientierten Dreikant zu einem anderen, zum *nämlichen Ker gehörigen der gleichen Klasse* übergehen kann[13]).

§ 2.

Vierflach (windschiefes Viereck).

Die aus vier Ebenen („Seitenflächen"), die nicht durch einen Punk gehen, und von denen nicht drei eine Gerade gemeinsam haben, ihre sechs Schnittlinien („Kanten") und den vier je drei Ebenen gemeinschaf lichen Punkten („Ecken") bestehende Figur nennen wir „*Vierflach*" (ε sich selbst dualistisch entsprechende auch „windschiefes Viereck").

Orientieren wir jetzt jede der Kanten sowohl durch einen Drehung sinn als auch durch einen Richtungssinn und jede Seitenfläche durch Um laufssinne um jede ihrer Ecken (bzw. jede Ecke durch Umlaufssinne jeder ihrer Seitenflächen), so können wir an dem Vierflach acht orientier Dreikante (vier Dreiflache und vi Dreiecke, die wir nach ihren Kant in der Bezeichnung der Fig. 2 bene nen wollen, aufzeigen. (Fig. 2a zei schematisch das vom Vierflach a der Kugel ausgeschnittene Kreisboge viereck.) *Den Inbegriff dieser* 8 *orie tierten Figuren nennen wir das „orie tierte Vierflach"*. Zur *Orientieru* brauchen wir 24 Festsetzungen: 6 Drehungssinne und 6 Richtungssin der Kanten und 12 Umlaufssinne in den Seitenflächen um die Ecken;

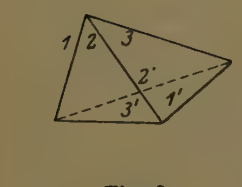


Fig. 2.

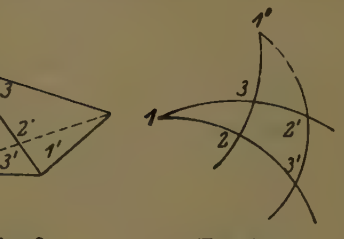


Fig. 2a.

[13]) Vgl. E. Study, a. a. O. S. 105 ff.

nd, wie wir zeigen werden, nicht vollständig voneinander unabhängig. ie $8 \times 6 = 48$ *Bestimmungsstücke*, die wir erhalten, reduzieren sich auf 24 Flächenwinkel, 6 Eckenabstände und 12 Kantenwinkel), wenn man be-htet, daß z. B. der Flächenwinkel $3'12'$ gleich dem negativen Flächen-inkel 312, der Eckenabstand $312'$ gleich dem negativen Eckenabstand 12 ist und jeder Kantenwinkel einmal in einem Dreiflach und einmal einem Dreieck auftritt. Die Bezeichnung, die wir für die 24 Bestim-ungsstücke wählen, ergibt sich im einzelnen aus folgender *Tabelle*:

reiflach	(123)	(12′3′)	(1′23′)	(1′2′3)
lächenwinkel	$-\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$	$\alpha_1 - \alpha_{2'} - \alpha_{3'}$	$\alpha_{1'} - \alpha_2\,\alpha_{3'}$	$-\alpha_{1'}\,\alpha_{2'} - \alpha_3$
antenwinkel	$a_{23}\ a_{31}\ a_{12}$	$a_{2'3'}\ a_{3'1}\ a_{12'}$	$a_{23'}\ a_{3'1'}\ a_{1'2}$	$a_{2'3}\ a_{31'}\ a_{1'2'}$
reieck	(123′)	(12′3)	(1′23)	(1′2′3′)
ckenabstände	$-A_1 A_2 - A_{3'}$	$A_1 - A_{2'} A_3$	$A_{1'} - A_2 - A_3$	$-A_{1'} A_{2'} A_{3'}$
antenwinkel	$a_{23'}\ a_{3'1}\ a_{12}$	$a_{2'3}\ a_{31}\ a_{12'}$	$a_{23}\ a_{31'}\ a_{1'2}$	$a_{2'3'}\ a_{3'1'}\ a_{1'2'}$.

Zur Abkürzung des Ausdruckes werden wir die Drehungssinne nach en zugehörigen Flächenwinkeln, die Richtungssinne nach den Eckenab-änden, die Umlaufssinne nach den Kantenwinkeln bezeichnen, so daß wir wa vom „Umlaufssinn a_{12}" statt vom „Umlaufssinn in der Seitenfläche $23'$ um die Ecke 123" sprechen.

Um zu untersuchen, wie viele von den Orientierungsfestsetzungen oneinander unabhängig sind, betrachten wir zunächst die Kantenwinkel. ie in ihnen enthaltenen ganzen Vielfachen von π sind, wenn man sie, ie das vorläufig geschehen soll, mod 2π betrachtet, durch die Orien-erung der beiden Kanten[14]) und zwar schon durch die Drehungssinne oder Richtungssinne) allein bestimmt. Nimmt man nun etwa die sechs rehungssinne willkürlich an, so sind die sämtlichen Kantenwinkel be-immt, wählt man dann noch *einen* Richtungssinn, so sind, da inzwischen ber die in den Kantenwinkeln auftretenden Vielfachen von π (mod 2π) hon verfügt ist, auch die fünf übrigen festgelegt: d. h. von den 12 Kanten-rientierungen sind nur sieben willkürlich wählbar.

Von den zu einer Kante gehörigen vier Umlaufssinnen z. B. $_{12}, a_{31}, a_{12'}, a_{3'1}$, sind nur drei unabhängig, denn schon durch die Um-ufssinne a_{12} und a_{31} sind die im Flächenwinkel α_1 enthaltenen ganzen ielfachen von π mod 2π bestimmt[14]), da nun andrerseits diese ganzen ielfachen von π auch durch die Umlaufssinne $a_{3'1}$ und $a_{12'}$ bestimmt nd, so ist von den letzten nur noch einer willkürlich. Man findet nun icht, daß durch sieben geeignet ausgewählte Umlaufssinne (z. B. $_{12}, a_{31}, a_{3'1} - a_{1'2}, a_{31'}, a_{3'1'} - a_{23}$) die übrigen mitbestimmt sind.

[14]) Vgl. oben Anm. [8]).

Im ganzen können wir also 14 Orientierungen voneinander unab hängig wählen und erhalten so zu jedem nicht orientierten Vierflach („Kern") $2^{14} = 16384$ orientierte, sofern wir solche, deren entsprechend Bestimmungsstücke sich nur um ganze Vielfache von 2π unterscheiden als gleichwertig ansehen.

Die Rolle, die hier die Zahl 14 spielt, hängt damit zusammen, daß das Vierflach aus 14 Elementen (4 Ebenen, 4 Punkten und 6 Geraden besteht.

§ 3.

Die Grundformeln.

Als einfachste fundamentale Beziehungen bestehen zwischen den sech Flächenwinkeln, sechs Eckenabständen und 12 Kantenwinkeln die $8 \cdot 6 = 4$ Kosinussätze der acht Dreikante. Von diesen sind nur 18 unabhäng entsprechend der Tatsache, daß man — wie sich unmittelbar aus de Kosinussätzen ergibt — sechs Bestimmungsstücke, *von denen nicht mehr als drei ein und demselben Dreikant und nicht zwei Tripel zusammen mit irgend einem vierten Bestimmungsstück gleichzeitig zwei verschiedenen Dreikanten angehören dürfen*, willkürlich wählen kann, während sich di übrigen 18 aus den voneinander unabhängigen Gleichungen errechnen lassen

Drückt man die Kosinus der Bestimmungsstücke durch die Bestim mungsstücke der *beiden* Dreikante, denen sie angehören, mit Hilfe de Kosinussätze aus und setzt beide Ausdrücke einander gleich, so erhäl man 24 „Kosinussätze des Vierflachs", die folgende Form haben:

$$\cos a_{23} \cos a_{31} - \sin a_{23} \cdot \sin a_{31} \cdot \cos \alpha_3$$
$$= \cos a_{23'} \cdot \cos a_{3'1} - \sin a_{23'} \cdot \sin a_{3'1} \cdot \cos A_{3'},$$

und von denen natürlich auch nur 18 voneinander unabhängig sein können

Da ich von den 96 „Sinussätzen des Vierflachs", die man aus de gleichnamigen Dreikantsätzen erhält, keinen Gebrauch mache, erübrig es sich sie anzuschreiben, zumal sie, ebenso wie die Kosinussätze, b Ihlenburg[15]), wo auch noch andere Vierflachsgleichungen zu finden sind zum Teil — wenn auch nicht in dieser Vollständigkeit — angegeben sind

Sämtliche Gleichungen dieses Paragraphen bleiben ungeändert, wenn man irgendwelche Bestimmungsstücke um beliebige ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert.

Zur Berechnung der Bestimmungsstücke des Vierflaches aus sechs gegebenen reichen übrigens, was ich noch einmal betonen möchte, die Kosinussätze der *Drei*kante völlig aus.

---

[15]) A. a. O. S. 21 ff.

§ 4.

Die Delambreschen Gleichungen und die Einteilung der Vierflache.

Von den acht Systemen von je 12 Delambreschen Gleichungen, die wischen den *halben* Bestimmungsstücken des Vierflachs gelten und die - im Gegensatz zu den Sätzen des vorigen Paragraphen — unter Umständen eine Änderung (Vorzeichenänderung) erfahren, wenn man Bestimmungsstücke um ganze Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert, möge das für das Dreiflach 123 geltende hier angeschrieben werden [16]):

$$\frac{\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}} = \pm\frac{\cos\frac{a_{31}-a_{12}}{2}}{\cos\frac{a_{23}}{2}}; \qquad \frac{\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}} = \mp\frac{\sin\frac{a_{31}-a_{12}}{2}}{\sin\frac{a_{23}}{2}}$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{\cos\frac{\alpha_1}{2}} = \mp\frac{\cos\frac{a_{31}+a_{12}}{2}}{\cos\frac{a_{23}}{2}}; \qquad \frac{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}}{\cos\frac{\alpha_1}{2}} = \pm\frac{\sin\frac{a_{31}+a_{12}}{2}}{\sin\frac{a_{23}}{2}}$$

nd zwei weitere Gruppen von vier Gleichungen, die man durch zyklische ertauschung der Indizes erhält.

In diesen Gleichungen gelten, wie man weiß, entweder überall die beren (Dreikante erster Klasse) oder überall die unteren (Dreikante weiter Klasse) Vorzeichen. Wären in den zu einem Vierflach gehörigen cht Dreikanten die in den Delambreschen Gleichungen geltenden Vorzeichen — wir sprechen zur Abkürzung von den „Vorzeichen der Dreiante" — voneinander unabhängig, so wären im ganzen $2^8 = 256$ Vorzeichenkombinationen und also auch Klassenkombinationen für die acht reikante des Vierflachs denkbar.

Geht man von einem bestimmten Vierflach aus, so kann man dadurch lle übrigen erhalten, daß man

erstens die Bestimmungsstücke stetig abändert und

zweitens die Bestimmungsstücke um beliebige Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert. Durch diese beiden Operationen denken wir uns n folgenden stets alle Vierflache aus einem „Ausgangsvierflach" erzeugt.

Wenn man zwei *Vier*flache stetig ineinander überführen kann, so kann an auch die Dreikante, aus denen sie sich zusammensetzen, stetig ineinander überführen und umgekehrt kann man zwei Vierflache sicher dann etig ineinander überführen, wenn man die einzelnen Dreikante, aus enen sie sich zusammensetzen, stetig in die entsprechenden überführen

[16]) Wegen der von der üblichen etwas abweichenden Form der Gleichungen gl. oben Anm. [11]).

kann. Aus dieser Erwägung ergibt sich im Anschluß an den Studyschen Satz (vgl. § 1) folgendes

Resultat: Vierflache, für die bezüglich ihrer acht Dreikante die gleiche Vorzeichenkombination gilt, lassen sich stetig ineinander überführen, während ein stetiger Übergang zwischen zwei Vierflachen verschiedener Vorzeichenkombination nicht möglich ist. Ändert man eines der Bestimmungsstücke des Vierflaches um ein ungerades ganzes Vielfaches von 2π, so ändert sich die Vorzeichenkombination, und zwar ändern sich die Vorzeichen immer gleichzeitig für zwei Dreikante, weil jedes Bestimmungsstück in zwei Dreikanten auftritt.

Da bei unserer Erzeugung der Vierflache ein Wechsel der Vorzeichenkombination nur bei Vermehrung der Bestimmungsstücke um ganze Vielfache von 2π eintreten kann, so folgt hier, daß höchstens $2^7 = 128$ Vorzeichenkombinationen eintreten können. Geht man nun von einer bestimmten Vorzeichenkombination aus, so kann man durch Vermehrung einzelner oder mehrerer Bestimmungsstücke um 2π unschwer zu 128 anderen Kombinationen gelangen und es erübrigt nur noch festzustellen, welche von den 256 *möglichen* Vorzeichenkombinationen die 128 *wirklich eintretenden* sind. Es genügt die Vorzeichenkombination in einem einzigen Vierflach, das dann als Ausgangsvierflach angesehen werden soll, anzugeben: Sämtliche Flächenwinkel und Eckenabstände seien $\pi/2$; nach der Dreikanttabelle des § 2 findet sich dann für die Kantenwinkel bis auf ganze Vielfache von 2π:

$$a_{\varkappa\varkappa+1} = \frac{\pi}{2}; \qquad a_{\varkappa'\varkappa+1} = \frac{\pi}{2}; \qquad a_{\varkappa'(\varkappa+1)'} = -\frac{\pi}{2}; \qquad a_{\varkappa(\varkappa+1)'} = -\frac{\pi}{2}$$

$$(\varkappa = 1, 2, 3;\ 3+1=1).$$

Setzt man die ganzen Vielfachen von 2π sämtlich gleich 0, so ergibt eine einfache Rechnung, daß in den Delambreschen Gleichungen sämtlicher Dreikante der Tabelle das *untere* Vorzeichen gilt, daß also sämtliche Dreikante unseres Vierflaches von der *zweiten* Klasse sind. Man erkennt daraus, daß man die 128 wirklich eintretenden Vorzeichenkombinationen erhält, wenn man diejenigen wählt, bei denen für keines oder eine *gerade* Anzahl der Dreikante in den Delambreschen Gleichungen die oberen Vorzeichen gelten und findet zusammenfassend den

Satz: *Die Gesamtheit der Vierflache zerfällt in* 128 *Klassen derart, daß jede Klasse für sich ein Kontinuum bildet und ein stetiger Übergang zwischen zwei dieser Kontinuen nicht möglich ist. Von den das Vierflach bildenden Dreikanten ist stets keines oder eine gerade Anzahl von der ersten, eine gerade Anzahl oder keines von der zweiten Klasse. Der Übergang zwischen den verschiedenen Vierflachsklassen bewerkstelligt man*

adurch, daß man Bestimmungsstücke des Vierflachs um ganze Vielfache on 2π verändert.

Man erkennt daraus, daß ein ähnlicher Fortschritt, wie ihn der Über-ang von den Grundformeln zu den Delambreschen brachte, bei den ierflachen ebensowenig wie bei den Dreikanten in irgendeiner Weise noch rzielt werden kann, auch nicht dadurch, daß man etwa Gleichungen ufstellte, in denen die dritten oder vierten Teile der Bestimmungsstücke uftreten würden, da wir hier schon die Gesamtheit der Vierflache in *voll-ändig in sich abgeschlossene Kontinua* zerspalten haben.

§ 5.

Weitere Formeln für die halben Bestimmungsstücke.

Wie man durch Elimination aus den Kosinussätzen der einzelnen reikante neue Vierflachsformeln gewann, so kann man auch aus den elambreschen Gleichungen neue Beziehungen ableiten. Eliminiert man B. aus der ersten Gruppe dieser Gleichungen für die Dreikante 123; 2′3′; 1′23; 1′2′3 die Bestimmungsstücke α_1, $A_{1'}$, a_{23}, $a_{2'3'}$, so erhält an ein System von 16 Gleichungen, von denen ich die beiden ersten nschreibe:

a)
$$\frac{\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_{2'}+\alpha_{3'}}{2}} : \frac{\sin\frac{A_2+A_3}{2}}{\sin\frac{A_{2'}+A_{3'}}{2}} = \pm \frac{\cos\frac{a_{31}-a_{12}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1}-a_{12'}}{2}} : \frac{\cos\frac{a_{31'}-a_{1'2}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1'}-a_{1'2'}}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_{2'}+\alpha_{3'}}{2}} : \frac{\sin\frac{A_2-A_3}{2}}{\sin\frac{A_{2'}-A_{3'}}{2}} = \pm \frac{\cos\frac{a_{31}-a_{12}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1}-a_{12'}}{2}} : \frac{\sin\frac{a_{31'}-a_{1'2}}{2}}{\sin\frac{a_{3'1'}-a_{1'2'}}{2}}$$

. . . . . .

Ebenso aus den Dreikanten 12′3; 123′; 1′2′3; 1′23′ durch Elimi-ation von $\alpha_{1'}$, A_1, $a_{2'3}$ und $a_{23'}$ 16 Gleichungen:

b)
$$\frac{\sin\frac{\alpha_{2'}+\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_2+\alpha_{3'}}{2}} : \frac{\sin\frac{A_{2'}+A_3}{2}}{\sin\frac{A_2+A_{3'}}{2}} = \pm \frac{\cos\frac{a_{31}-a_{12'}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1}-a_{12}}{2}} : \frac{\cos\frac{a_{31'}-a_{1'2'}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1'}-a_{1'2}}{2}}$$

. . . . . .

Durch zyklische Vertauschung der Indizes 123, bei der auch die ndizes 1′2′3′ zyklisch vertauscht werden, erhält man weitere Systeme a und IIb, IIIa und IIIb von je 16 Gleichungen, also im ganzen 6 Gleichungen.

In jedem dieser Systeme gehören die positiven und die negative Vorzeichen zusammen, man kann sogar zeigen, daß in den Systemen a *und* gleiche Vorzeichen zusammengehören, außerdem daß das Produkt der vier zu wählenden Vorzeichen stets positiv sein muß, so daß im ganzen nur vier Vorzeichenkombinationen eintreten könnten. Man erhielte also aus diesen Gleichungen eine wesentlich gröbere Einteilung der Vierflache, als wir sie im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben. Durch die Divisionen, die wir vorgenommen haben, sind uns eine Reihe von Vorzeichenunterscheidungen verloren gegangen, so daß unter Zugrundelegung unserer jetzigen Formeln zu jeder Vorzeichenkombination nicht nur eine sondern eine ganze Reihe von Vierflachsklassen (nämlich 32) gehören würden. Es ist das eine ähnliche Erscheinung, wie man sie in der Dreikantlehre von den Neperschen Analogien her kennt: auch diese erhält man durch Division der Delambreschen Gleichungen, wodurch der Klassenunterschied wegfällt. Noch deutlicher tritt diese Parallele hervor, wenn man durch weitere Division in den Gleichungen (Ia) usw. die Eckenabstände oder die Flächenwinkel eliminiert. Man erhält speziell aus (Ia) folgende vier Formeln:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2'}+\alpha_{3'}}{2}} = \frac{\cos\frac{a_{31}-a_{12}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1}-a_{12'}}{2}} : \frac{\cos\frac{a_{31}+a_{12}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1}+a_{12'}}{2}}; \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A_2+A_3}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A_{2'}+A_{3'}}{2}} = \frac{\cos\frac{a_{31'}-a_{1'2}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1'}-a_{1'2'}}{2}} : \frac{\cos\frac{a_{31'}+a_{1'2}}{2}}{\cos\frac{a_{3'1'}+a_{1'2'}}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2'}-\alpha_{3'}}{2}} = \frac{\sin\frac{a_{31}-a_{12}}{2}}{\sin\frac{a_{3'1}-a_{12'}}{2}} : \frac{\sin\frac{a_{31}+a_{12}}{2}}{\sin\frac{a_{3'1}+a_{12'}}{2}}; \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A_2-A_3}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A_{2'}-A_{3'}}{2}} = \frac{\sin\frac{a_{31'}-a_{1'2}}{2}}{\sin\frac{a_{3'1'}-a_{1'2'}}{2}} : \frac{\sin\frac{a_{31'}+a_{1'2}}{2}}{\sin\frac{a_{3'1'}+a_{1'2'}}{2}}$$

Die anderen Systeme ergeben weitere 20 Gleichungen. Hier fallen *alle* Vorzeichen- und Klassenunterschiede weg. Auch rein formal springt die Ähnlichkeit der Gleichungen mit den Neperschen Analogien, aus denen sie auch unmittelbar abgeleitet werden können, in die Augen.

Das Herausfallen der Eckenabstände aus den ersten Gleichungen dieser Paare macht diese besonders geeignet zur Anwendung auf gewöhnliche sphärische Vierecke, d. h. Kreisbogenvierecke, deren Seitenkreise *größte* Kugelkreise sind.

§ 6.

Die endliche Gruppe.

Wenn man orientierte Vierflache, deren entsprechende Bestimmungsstücke sich nur um ganze Vielfache von 2π unterscheiden, als identisch ansieht, so wird man nach § 2 eine Gruppe von 2^{14} Substitutionen angeben können, durch die man die Bestimmungsstücke eines orientierten

	Flächenwinkel						Eckenabstände						Kantenwinkel									
$S_0=G_0$ $=\Gamma_0=T_0$	α_1	α_2	α_3	$\alpha_{1'}$	$\alpha_{2'}$	$\alpha_{3'}$	A_1	A_2	A_3	$A_{1'}$	$A_{2'}$	$A_{3'}$	a_{12}	$a_{1'2}$	$a_{1'2'}$	$a_{12'}$	a_{23}	$a_{2'3}$	$a_{2'3'}$	$a_{23'}$	a_{31}	$a_{3'1}$	$a_{3'1'}$	$a_{31'}$
S_1	.	$\pi+\alpha_2$	$\pi+\alpha_3$	.	$\pi+\alpha_{2'}$	$\pi+\alpha_{3'}$	.	$\pi+A_2$	$\pi+A_3$	.	$\pi+A_{2'}$	$\pi+A_{3'}$	$-a_{12}$	$-a_{1'2}$	$-a_{1'2'}$	$-a_{12'}$	.	.	.	.	$-a_{31}$	$-a_{3'1}$	$-a_{3'1'}$	$-a_{31'}$
S_2	$\pi+\alpha_1$	.	$\pi+\alpha_3$	$\pi+\alpha_{1'}$	.	$\pi+\alpha_{3'}$	$\pi+A_1$	.	$\pi+A_3$	$\pi+A_{1'}$	.	$\pi+A_{3'}$	$-a_{12}$	$-a_{1'2}$	$-a_{1'2'}$	$-a_{12'}$	$-a_{23}$	$-a_{2'3}$	$-a_{2'3'}$	$-a_{23'}$	.	.	.	.
S_3	$\pi+\alpha_1$	$\pi+\alpha_2$	.	$\pi+\alpha_{1'}$	$\pi+\alpha_{2'}$	.	$\pi+A_1$	$\pi+A_2$	.	$\pi+A_{1'}$	$\pi+A_{2'}$	.	.	.	.	.	$-a_{23}$	$-a_{2'3}$	$-a_{2'3'}$	$-a_{23'}$	$-a_{31}$	$-a_{3'1}$	$-a_{3'1'}$	$-a_{31'}$
G_1	.	.	.	.	.	.	$2\pi+A_1$	$\pi+A_2$	$\pi+A_3$	$2\pi+A_{1'}$	$\pi+A_{2'}$	$\pi+A_{3'}$	$-a_{12}$	.	.	$-a_{12'}$	$-a_{23}$	.	$-a_{2'3'}$	.	$-a_{31}$	$-a_{3'1}$	.	.
G_2	.	.	.	.	.	.	$\pi+A_1$	$2\pi+A_2$	$\pi+A_3$	$\pi+A_{1'}$	$2\pi+A_{2'}$	$\pi+A_{3'}$	$-a_{12}$	$-a_{1'2}$	.	.	$-a_{23}$	.	.	$-a_{23'}$	$-a_{31}$	.	$-a_{3'1'}$	.
G_3	.	.	.	.	.	.	$\pi+A_1$	$\pi+A_2$	$2\pi+A_3$	$\pi+A_{1'}$	$\pi+A_{2'}$	$2\pi+A_{3'}$	$-a_{12}$	.	$-a_{1'2'}$	.	$-a_{23}$	$-a_{2'3}$	.	.	$-a_{31}$	.	.	$-a_{31'}$
$G_{1'}$	.	.	.	.	.	.	$2\pi+A_1$	$\pi+A_2$	$\pi+A_3$	$2\pi+A_{1'}$	$\pi+A_{2'}$	$\pi+A_{3'}$	.	$-a_{1'2}$	$-a_{1'2'}$	.	.	$-a_{2'3}$	.	$-a_{23'}$	.	.	$-a_{3'1'}$	$-a_{31'}$
$G_{2'}$	.	.	.	.	.	.	$\pi+A_1$	$2\pi+A_2$	$\pi+A_3$	$\pi+A_{1'}$	$2\pi+A_{2'}$	$\pi+A_{3'}$	.	.	$-a_{1'2'}$	$-a_{12'}$	.	$-a_{2'3}$	$-a_{2'3'}$	.	.	$-a_{3'1}$	.	$-a_{31'}$
$G_{3'}$	.	.	.	.	.	.	$\pi+A_1$	$\pi+A_2$	$2\pi+A_3$	$\pi+A_{1'}$	$\pi+A_{2'}$	$2\pi+A_{3'}$	.	$-a_{1'2}$	.	$-a_{12'}$	.	.	$-a_{2'3'}$	$-a_{23'}$	.	$-a_{3'1}$	$-a_{3'1'}$	.
Γ_1	$2\pi+\alpha_1$	$\pi+\alpha_2$	$\pi+\alpha_3$	$2\pi+\alpha_{1'}$	$\pi+\alpha_{2'}$	$\pi+\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	.	.	$-a_{1'2}$	$-a_{1'2'}$	.	$-a_{23}$	.	$-a_{2'3'}$	.	.	.	$-a_{3'1'}$	$-a_{31'}$
Γ_2	$\pi+\alpha_1$	$2\pi+\alpha_2$	$\pi+\alpha_3$	$\pi+\alpha_{1'}$	$2\pi+\alpha_{2'}$	$\pi+\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$-a_{1'2'}$	$-a_{12'}$	.	$-a_{2'3}$	$-a_{2'3'}$	.	$-a_{31}$	.	$-a_{3'1'}$	.
Γ_3	$\pi+\alpha_1$	$\pi+\alpha_2$	$2\pi+\alpha_3$	$\pi+\alpha_{1'}$	$\pi+\alpha_{2'}$	$2\pi+\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	.	$-a_{12}$	.	$-a_{1'2'}$	.	.	.	$-a_{2'3'}$	$-a_{23'}$	.	$-a_{3'1}$	$-a_{3'1'}$	.
$\Gamma_{1'}$	$2\pi+\alpha_1$	$\pi+\alpha_2$	$\pi+\alpha_3$	$2\pi+\alpha_{1'}$	$\pi+\alpha_{2'}$	$\pi+\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	.	$-a_{12}$	.	.	$-a_{12'}$	.	$-a_{2'3}$	.	$-a_{23'}$	$-a_{31}$	$-a_{3'1}$	.	.
$\Gamma_{2'}$	$\pi+\alpha_1$	$2\pi+\alpha_2$	$\pi+\alpha_3$	$\pi+\alpha_{1'}$	$2\pi+\alpha_{2'}$	$\pi+\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	.	$-a_{12}$	$-a_{1'2}$	.	.	$-a_{23}$	.	.	$-a_{23'}$	$-a_{31}$	$-a_{3'1}$	.	.
$\Gamma_{3'}$	$\pi+\alpha_1$	$\pi+\alpha_2$	$2\pi+\alpha_3$	$\pi+\alpha_{1'}$	$\pi+\alpha_{2'}$	$2\pi+\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	.	.	$-a_{1'2}$	.	$-a_{12'}$	$-a_{23}$	$-a_{2'3}$	.	.	$-a_{31}$	.	$-a_{31'}$
$\bar{G}=\bar{\Gamma}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$-a_{12}$	$-a_{1'2}$	$-a_{1'2'}$	$-a_{12'}$	$-a_{23}$	$-a_{2'3}$	$-a_{2'3'}$	$-a_{23'}$	$-a_{31}$	$-a_{3'1}$	$-a_{3'1'}$	$-a_{31'}$
T_1	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$	$-\alpha_{1'}$	$-\alpha_{2'}$	$-\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
H_1	$2\pi-\alpha_1$	.	.	.	.	.	$2\pi-A_1$	.	.	.	.	.	$\pi+a_{12}$	.	.	$\pi+a_{12'}$	.	.	.	.	$\pi+a_{31}$	$\pi+a_{3'1}$	.	.
H_2	.	$2\pi-\alpha_2$	.	.	.	.	.	$2\pi-A_2$	.	.	.	.	$\pi+a_{12}$	$\pi+a_{1'2}$	.	.	$\pi+a_{23}$	.	.	$\pi+a_{23'}$	.	.	.	.
H_3	.	.	$2\pi-\alpha_3$	.	.	.	.	.	$2\pi-A_3$	.	.	.	.	.	.	.	$\pi+a_{23}$	$\pi+a_{2'3}$	.	.	$\pi+a_{31}$	.	.	$\pi+a_{31'}$
H_4	.	.	.	$2\pi-\alpha_{1'}$	.	.	.	.	.	$2\pi-A_{1'}$	.	.	.	$\pi+a_{1'2}$	$\pi+a_{1'2'}$	.	.	.	.	.	.	.	$\pi+a_{3'1'}$	$\pi+a_{31'}$
H_5	.	.	.	.	$2\pi-\alpha_{2'}$	.	.	.	.	.	$2\pi-A_{2'}$	.	.	.	$\pi+a_{1'2'}$	$\pi+a_{12'}$	.	$\pi+a_{2'3}$	$\pi+a_{2'3'}$	.	.	.	$\pi+a_{3'1'}$	$\pi+a_{31'}$
H_6	.	.	.	.	.	$2\pi-\alpha_{3'}$	.	.	.	.	.	$2\pi-A_{3'}$	.	.	.	.	.	.	$\pi+a_{2'3'}$	$\pi+a_{23'}$	.	$\pi+a_{3'1}$	$\pi+a_{3'1'}$	.

rflaches in die eines anderen (zum nämlichen Kern gehörigen) über-
ren kann. In der nebenstehenden Tabelle schreiben wir 24 einzelne Sub-
utionen an, die diese Eigenschaft haben; sie sind so gefunden, daß jede
ihnen — wovon man sich leicht überzeugt — die Bestimmungsstücke
acht zum Vierflach gehörigen Dreikante einer Substitution unterwirft,
zu der oben (§ 1) *erwähnten von Study angegebenen Gruppe* von
Substitutionen *gehört*. Die an sich dabei selbstverständlich willkürlichen
zen Vielfachen von 2π sind in Übereinstimmung mit Studys Fest-
zungen so gewählt, daß sich bei Anwendung der Substitutionen *die*
sse der einzelnen Dreikante, also auch die unseres Vierflaches, *nicht*
lert, wenn man nachträglich die Bestimmungsstücke nicht mehr mod 2π
rachtet[17]).

Zwischen den Substitutionen der Tabelle bestehen folgende Beziehungen:

$$(\text{Identität}) = S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_1 S_2 S_3.$$

$$S_2 = S_3; \quad S_2 S_3 = S_1; \quad S_3 S_1 = S_2.$$

$$(\text{Identität}) = \Gamma_0 = G_1^2 = G_2^2 = G_3^2 = G_{1'}^2 = G_{2'}^2 = G_{3'}^2 = \Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = \Gamma_3^2$$
$$= \Gamma_{1'}^2 = \Gamma_{2'}^2 = \Gamma_{3'}^2 = \bar{G}^2 = \bar{\Gamma}^2.$$

$$G_2 = G_{1'} G_{2'} = G_{3'}; \quad G_2 G_3 = G_{2'} G_{3'} = G_{1'}; \quad G_3 G_1 = G_{3'} G_{1'} = G_{2'}.$$

$$G_{1'} = G_2 G_{2'} = G_3 G_{3'} = \bar{G}.$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_{1'} \Gamma_{2'} = \Gamma_{3'}; \quad \Gamma_2 \Gamma_3 = \Gamma_{2'} \Gamma_{3'} = \Gamma_{1'}; \quad \Gamma_3 \Gamma_1 = \Gamma_{3'} \Gamma_{1'} = \Gamma_{2'}.$$

$$\Gamma_{1'} = \Gamma_2 \Gamma_{2'} = \Gamma_3 \Gamma_{3'} = \bar{\Gamma}.$$

$$(\text{Identität}) = T_1^2.$$

Wir bilden aus unseren Substitutionen folgende Gruppen:

1. Die aus den vier Substitutionen S_0, S_1, S_2, S_3 bestehende Gruppe S.
2. Die aus den acht Substitutionen G_0, G_1, G_2, G_3, $G_{1'}$, $G_{2'}$, $G_{3'}$, $\bar{G}$ tehende Gruppe G.
3. Die aus den acht Substitutionen $T_0 \Gamma_0$, $T_1 \Gamma_1$, $T_1 \Gamma_2$, $T_1 \Gamma_3$, $T_1 \Gamma_{1'}$, $\Gamma_{2'}$, $T_1 \Gamma_{3'}$, $T_1 \bar{\Gamma}$ bestehende Gruppe Γ.
4. Die Gruppe H, deren 64 Substitutionen man dadurch erhält, daß n in dem Ausdruck

$$H_1^{h_1} \cdot H_2^{h_2} \cdot H_3^{h_3} \cdot H_{1'}^{h_{1'}} \cdot H_{2'}^{h_{2'}} \cdot H_{3'}^{h_{3'}},$$

sen sechs „erzeugende" Substitutionen voneinander unabhängig sind,

[17]) Die in der Tabelle an erster Stelle angeführte Substitution — die Identität — d im folgenden je nach der Untergruppe, der sie jeweils zugezählt wird, verschieden eichnet. — Bleibt in einer Substitution ein Bestimmungsstück ungeändert, so ist in der Tabelle durch einen Punkt angedeutet.

den Exponenten die Werte 0 und 1 zuweist und alle möglichen Kombi nationen berücksichtigt.

Die hier aufgestellten Gruppen sind *Unter*gruppen der von uns g suchten Gruppe von 2^{14} Substitutionen; die Substitutionen jeder einzelne sind — abgesehen von der Identität — unabhängig von denen der drei a deren. *Durch ihre Zusammensetzung erhält man daher* $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 64 = 2^{14}$ Su stitutionen: *also gerade die gesuchte Gruppe.*

Der unmittelbare Zusammenhang mit den Überlegungen des § 2 tri noch schärfer hervor, wenn man die Gruppe durch 14 Substitution derart erzeugt, daß man in dem Ausdruck

$$H_1^{h_1} \cdot H_2^{h_2} \cdot H_3^{h_3} \cdot H_{1'}^{h_{1'}} \cdot H_{2'}^{h_{2'}} \cdot H_{3'}^{h_{3'}} \cdot T_1^{t_1} \cdot S_1^{s_1} \cdot S_2^{s_2} \cdot G_1^{g_1} \cdot G_2^{g_2} \cdot G_3^{g_3} \cdot \Gamma_1^{\gamma_1} \cdot \Gamma_2^{\gamma_2},$$

in dem jetzt alle vorkommenden Substitutionen voneinander unabhäng sind, den Exponenten in allen möglichen Kombinationen die Werte 0 u 1 zuteilt.

Wir erhalten dadurch offenbar dieselben 2^{14} Substitutionen wie vorhe auch ist leicht einzusehen, daß den sieben Substitutionen H und T je ei Änderung in den Orientierungen der Achsen, den sieben Substitution S, G und Γ je eine Änderung in den Orientierungen um die Ecken den Seitenflächen entspricht.

§ 7.

Die unendliche Gruppe.

Die Bedeutung der im vorangehenden Paragraphen aufgestellten Grup von 2^{14} Substitutionen liegt zum Teil darin, daß sich bei ihrer Anwe dung die Vorzeichenkombination in den Delambreschen Gleichung nicht ändert — die auftretenden ganzen Vielfachen von 2π hatten wir geradezu nach dieser Forderung eingerichtet — daß also *die Klasse des Vi flachs erhalten bleibt,* wenn wir jetzt wieder Vierflache, deren entsprechen Bestimmungsstücke sich nur um ganze Vielfache von 2π unterscheid als verschieden ansehen wollen. Wir fragen uns nun nach der *Gesamth* aller derjenigen Substitutionen, denen wir die Bestimmungsstücke ei orientierten Vierflaches unterwerfen können, um die Bestimmungsstü eines anderen zum nämlichen Kern gehörenden (mit der gleichen Kanti numerierung) zu bekommen, *das zur nämlichen Klasse gehört.*

Vermehrt man Bestimmungsstücke des Vierflaches um beliebige ga Vielfache von 2π, so erhält man im allgemeinen ein Vierflach, das ni mehr zur nämlichen Klasse gehört, wie das ursprüngliche. Wenn man Anzahl der den einzelnen Bestimmungsstücken hinzugefügten ganzen Vi fachen von 2π in leicht verständlicher Weise mit $\varkappa_\nu$, K_ν, $k_{\mu\nu}$ bezeichn so können die Bedingungen dafür, daß das neue und das ursprüngli

rflach der nämlichen Klasse angehören, daß sich also die Klasse keines zigen der acht Dreikante ändert, mit Rücksicht auf die Tabelle des § 2 rch folgende acht Kongruenzen, die sämtlich mod 2 zu verstehen sind, gedrückt werden:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + k_{23} + k_{31} + k_{12} \equiv 0\\
&x_1 + x_{2'} + x_{3'} + k_{2'3'} + k_{3'1} + k_{12'} \equiv 0\\
&x_{1'} + x_2 + x_{3'} + k_{23'} + k_{3'1'} + k_{1'2} \equiv 0\\
&x_{1'} + x_{2'} + x_3 + k_{2'3} + k_{31'} + k_{1'2'} \equiv 0\\
&K_1 + K_2 + K_{3'} + k_{23'} + k_{3'1} + k_{12} \equiv 0\\
&K_1 + K_{2'} + K_3 + k_{2'3} + k_{31} + k_{12'} \equiv 0\\
&K_{1'} + K_2 + K_3 + k_{23} + k_{31'} + k_{1'2} \equiv 0\\
&K_{1'} + K_{2'} + K_{3'} + k_{2'3'} + k_{3'1'} + k_{1'2'} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Kongruenzen gibt z. B. die Bedingung dafür an, daß h die Klasse des Dreiflachs 123 nicht ändert[18]).

Fügt man den Substitutionen des § 6 noch alle diejenigen hinzu, die tstehen, wenn man die Bestimmungsstücke um ganze Vielfache von 2π rmehrt, *deren Anzahlen mit diesen Kongruenzen verträglich sind*, so hält man sämtliche von uns gesuchte Substitutionen, die eine ganz bemmte unendliche Gruppe bilden und *denen gegenüber alle zwischen den estimmungsstücken bestehenden Formeln invariant sind.*

Der Übergang von einer Vierflachsklasse zu den anderen kann berkstelligt werden durch Substitutionen, die den Bestimmungsstücken ganze elfache von 2π hinzufügen, deren Anzahlen nicht sämtliche angeführte ongruenzen befriedigen. Da man erkennt, daß stets nur in einer *geraden* nzahl unserer acht Kongruenzen auf der rechten Seite 1 stehen kann, sieht man, daß wir 128 verschiedene Fälle bekommen, die gerade unren 128 Klassen entsprechen.

(Abgeschlossen am 20. Juli 1924.)

[18]) Vgl. E. Study, a. a. O. § 5.

(Eingegangen am 23. Juli 1924.)

Über die Entwicklung von Funktionen zweier komplexe Veränderlichen nach Laméschen Funktionen.

Von

Otto Volk in Kowno (Litauen).

In Verallgemeinerung der bekannten Neumannschen Darstellung an lytischer Funktionen durch Kugel- und verwandte Funktionen haben sie F. v. Lindemann[1]) und im Anschluß daran E. Hilb[2]) mit der Darstellu solcher Funktionen durch Reihen, die nach Laméschen Funktionen fo schreiten, beschäftigt. Die von Lindemann aufgedeckte Existenz v Nullentwicklungen[3]) läßt es aber als zweckmäßig erscheinen, die Lam schen Funktionen zur Entwicklung von Funktionen von zwei Veränd lichen heranzuziehen, ein Gedanke, auf den mich E. Hilb schon vor länger Zeit aufmerksam gemacht hat. Im Anschluß an meine früheren Unt suchungen im Falle *einer* Veränderlichen[4]) soll im folgenden dieses Probl behandelt werden und zwar, wie mir scheint, als erster Fall dieser Art.

§ 1.

Die Laméschen Polynome.

Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad P_2(z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}P_2'(z)\frac{dy}{dz} + (P_0(z) + \lambda^2 Q(z) + \mu^2)y = 0,$$

wo $P_2(z)$ eine ganze Funktion von z vom Grade m, $P_0(z)$, $Q(z)$ sol vom Grade $m-2$ seien und λ, μ zwei reelle Parameter. $P_2(z) = 0$ ha

[1]) F. Lindemann, Entwicklung der Funktionen einer komplexen Veränderlich nach Laméschen Funktionen und nach Zugeordneten der Kugelfunktionen, Ma Annalen 19 (1881), S. 323–386.

[2]) E. Hilb, Beiträge zur Theorie der Laméschen Funktionen, Diss. München 19

[3]) Vgl. l. c. S. 361 ff.

[4]) O. Volk, Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Verän lichen nach Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung einem Parameter genügen, Math. Annalen 86 (1922), S. 296–316.

r Einfachheit halber lauter reelle, voneinander verschiedene Wurzeln, ren größte z_m sei.

Soll die Differentialgleichung (1) das Polynom:

$$y = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \quad (n \text{ positiv und ganz})$$

Lösung besitzen, so muß sein:

$$\lambda^2 = \alpha n^2 + \beta n + \gamma = \alpha\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta - \alpha) n + \gamma - \frac{\alpha}{4}.$$

Die Werte, die μ annehmen kann, sind durch n und m vollständig stimmt[5]). Ihre Anzahl sei $\sigma + 1$. Wir wollen die Annahme machen, ß für hinreichend große n μ^2 höchstens von der gleichen Größenord- ng sei wie λ^2, also:

$$\mu^2 \sim \alpha_1 n^2 + \beta_1 n + \gamma_1 = \alpha_1\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta_1 - \alpha_1) n + \gamma_1 - \frac{\alpha_1}{4}.$$

Die zu einem bestimmten n gehörigen $\sigma + 1$ Polynome, die der Glei- ung (1) genügen, bezeichnen wir mit u_{ns} $(s = 1, 2, \ldots, \sigma + 1)$. Durch e Substitution

$$y = u_{ns}, \qquad t = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}$$

ht (1) über in:

$$\frac{d^2 u_{ns}}{dt^2} + (P_0(z) + \lambda^2 Q(z) + \mu^2) u_{ns} = 0.$$

Es seien $z_1' < z_2 < z_3 < \ldots < z_m$ die (reellen) Wurzeln von $P_3(z) = 0$; r schneiden die z-Ebene längs der Verbindungslinie je zweier Nullstellen n $P_3(z)$ auf (bei ungeradem m tritt noch die Stelle $z = \infty$ hinzu) und tzen zur Abkürzung:

$$d\varepsilon = \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}, \qquad d\eta = \frac{d\zeta}{\sqrt{P_3(\zeta)}}.$$

Aus (6) folgt dann:

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2) \int_{z_1'}^{z_2} Q(z)\, u_{ns}(z)\, u_{n_1 s_1}(z)\, d\varepsilon = -(\mu^2 - \mu_1^2) \int_{z_1'}^{z_2} u_{ns}(z)\, u_{n_1 s_1}(z)\, d\varepsilon,$$

$$(\mu^2 - \mu_1^2) \int_{z_3}^{z_4} u_{ns}(\zeta)\, u_{n_1 s_1}(\zeta)\, d\eta = (\lambda^2 - \lambda_1^2) \int_{z_2}^{z_4} Q(\zeta)\, u_{ns}(\zeta)\, u_{n_1 s_1}(\zeta)\, d\eta,$$

raus sich durch Multiplikation ergibt:

$$^2 - \lambda_1^2)(\mu^2 - \mu_1^2) \int_{z_3}^{z_4} d\eta \int_{z_1'}^{z_2} (Q(z) - Q(\zeta))\, u_{ns}(z)\, u_{n_1 s_1}(z)\, u_{ns}(\zeta)\, u_{n_1 s_1}(\zeta)\, d\varepsilon = 0.$$

[5]) Vgl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen 1 (1878), S. 472 ff.

Ist $\lambda \neq \lambda_1$, $\mu \neq \mu_1$, so folgt hieraus:

$$(8) \qquad \int_{z_3}^{z_4} d\eta \int_{z_1'}^{z_2} (Q(z) - Q(\zeta))\, u_{ns}(z)\, u_{n_1 s_1}(z)\, u_{ns}(\zeta)\, u_{n_1 s_1}(\zeta)\, d\varepsilon = 0.$$

Wird $\lambda = \lambda_1$, $\mu \neq \mu_1$, so ist, wie man sich leicht überzeugt, (8) ebe falls erfüllt. Dagegen wird das Integral nicht Null, wenn gleichzeit $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$ wird.

Bei allen Integralen ist der Integrationsweg so zu wählen, daß ke Querschnitt getroffen wird.

Wie man aus der Differentialgleichung (1) ersieht, gibt es zu jedem (oder n) den $\sigma + 1$ zugehörigen Werten von μ entsprechend genau $\sigma +$ Lösungen, die eindeutig und für alle endlichen Punkte endlich bleiben, u es gilt der Satz:

Die durch (3) *bestimmten Werte* λ *sind die einzigen, die in der ganz* z*-Ebene reguläre Lösungen von* (1) *liefern*[6]).

§ 2.

Die Problemstellung.

Aus der Formel (8) folgt zunächst rein formal:

$$(I) \qquad \frac{1}{(\zeta_1 - \zeta)(z_1 - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta)\, V_{ns}(z_1, \zeta_1),$$

wo

$$(9) \qquad V_{ns}(z_1, \zeta_1) = \frac{1}{c_{ns}} \int_{z_3}^{z_4} d\eta \int_{z_1'}^{z_2} \frac{u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta)}{(\zeta_1 - \zeta)(z_1 - z)} (Q(z) - Q(\zeta))\, d\varepsilon$$

und

$$(10) \qquad c_{ns} = \int_{z_3}^{z_4} d\eta \int_{z_1'}^{z_2} u_{ns}(z)^2\, u_{ns}(\zeta)^2 (Q(z) - Q(\zeta))\, d\varepsilon.$$

Nimmt man ζ, z reell, ζ_1, z_1 aber komplex, so erkennt man die Mö lichkeit und die Eindeutigkeit der Entwicklung (I) durch Zerlegen v $\frac{1}{(\zeta_1 - \zeta)(z_1 - z)}$ in seinen reellen und imaginären Bestandteil aus dem E wicklungsproblem im Reellen[7]). Wir brauchen also für die Gültigkeit v (I) auch für komplexe ζ, z nur die gleichmäßige Konvergenz der recht Seite darzutun. In der Tat gilt nun der Satz:

---

[6]) Die Richtigkeit dieses Satzes ist eine Folge des analogen Problems für re Veränderliche; vgl. E. Hilb, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Ma Annalen **63** (1907), S. 38–53; A. C. Dixon, Harmonic expansions of functions two variables, Proceed. of the Lond. math. Society (2), **5** (1907), S. 411–478.

[7]) Vgl. Anmerkung [6]).

I. *Die Reihe auf der rechten Seite von* (I) *konvergiert gleichmäßig, lange* z_1 *und* ζ_1 *auf Kurven* C_{z_1} *und* C_{ζ_1} *liegen, die die Kurven* C_z *und* C_ζ *umschließen*[8]). *Sie darf beliebig oft nach* z *und* ζ *differentiiert werden.*

Hieraus folgen mittels des Cauchyschen Integralsatzes für zwei Veränderliche die Sätze:

II. *Ist* $f(z, \zeta)$ *eine innerhalb der Kurven* C_z *und* C_ζ *reguläre Funktion, so läßt sich* $f(z, \zeta)$ *in diesen Bereichen durch die Reihe darstellen:*

$$f(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} a_{ns} u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta),$$

die Koeffizienten durch die Formel gegeben sind:

$$a_{ns} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{\zeta_1}} d\eta_1 \int_{C_{z_1}} f(z_1, \zeta_1)\, V_{ns}(z_1, \zeta_1)\, d\varepsilon_1.$$

Jede solche Entwicklung darf beliebig oft nach z *und* ζ *differentiiert werden.*

III. *Ist* $f(z, \zeta)$ *eine willkürliche Funktion, die innerhalb des von zwei Kurven* C_{z_1} *und* C_{z_2} *bzw.* C_{ζ_1} *und* C_{ζ_2} *begrenzten ringförmigen Bereiches regulär bleibt und sind* z, ζ *bzw. in diesen gelegen, so gilt die Entwicklung:*

$$f(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} a_{ns} u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} b_{ns} V_{ns}(z, \zeta),$$

wobei sich die Koeffizienten a_{ns}, b_{ns} *durch die Formeln bestimmen:*

$$a_{ns} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{\zeta_1}} d\eta_1 \int_{C_{z_1}} f(z_1, \zeta_1)\, V_{ns}(z_1, \zeta_1)\, d\varepsilon_1,$$

$$b_{ns} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{\zeta_2}} d\eta_2 \int_{C_{z_2}} f(z_2, \zeta_2)\, u_{ns}(z_2)\, u_{ns}(\zeta_2)\, d\varepsilon_2.$$

C_{z_1}, C_{ζ_1} sind dabei die äußeren, C_{z_2}, C_{ζ_2} die inneren Begrenzungskurven. Jede solche Entwicklung kann beliebig oft nach z, ζ *differentiiert werden.*

§ 3.

Die zugeordneten Funktionen.

Setzen wir symbolisch:

(1a) $$\Delta f = P_2(z) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{2} P_2'(z) \frac{\partial f}{\partial z} + (P_0(z) + \lambda^2 Q(z)) f,$$

(1b) $$\Delta' f = P_2(z_1) \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + \frac{3}{2} P_2'(z_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} + \left(P_0(z_1) + \frac{1}{2} P_2''(z_1) + \lambda^2 Q(z_1)\right) f,$$

[8]) Vgl. § 4.

wo f eine Funktion der beiden Veränderlichen z, z_1 ist, so folgt[9]):

$$(12)\quad \Delta\left(\frac{1}{z_1-z}\right)=\Delta'\left(\frac{1}{z_1-z}\right)+A_0(z_1)+A_1(z_1)z+\ldots+A_{m-1}(z_1)z^{m-1},$$

wo die Funktionen $A_0(z_1), A_1(z_1), \ldots, A_{m-1}(z_1)$ ganze Funktionen höchstens vom Grade $m-1$ in z_1 sind. Hieraus folgt:

$$(13\,a)\quad \Delta_z\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}=\Delta'_{z_1}\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}+\frac{1}{\zeta_1-\zeta}\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(z_1)z^\nu,$$

$$(13\,b)\quad \Delta_\zeta\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}=\Delta'_{\zeta_1}\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}+\frac{1}{z_1-z}\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(\zeta_1)\zeta^\nu,$$

wo die den Symbolen Δ, Δ' angefügten Indizes andeuten sollen, für welche Veränderliche sie zu bilden sind. Setzen wir:

$$(14)\qquad U_{ns}(z,\zeta)=u_{ns}(z)\,u_{ns}(\zeta),$$

so genügt $U_{ns}(z,\zeta)$ der partiellen Differentialgleichung:

$$(15)\quad P_2(z)\frac{\partial^2U_{ns}}{\partial z^2}-P_2(\zeta)\frac{\partial^2U_{ns}}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(P_2'(z)\frac{\partial U_{ns}}{\partial z}-P_2'(\zeta)\frac{\partial U_{ns}}{\partial\zeta}\right)$$
$$+[P_0(z)-P_0(\zeta)+\lambda^2(Q(z)-Q(\zeta))]U_{ns}=0.$$

Es ist nun:

$$P_2(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}\right)+\frac{1}{2}P_2'(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}\right)+\frac{P_0(z)+\lambda^2Q(}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-}$$
$$-P_2(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}\right)-\frac{1}{2}P_2'(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}\right)-\frac{P_0(\zeta)+\lambda^2Q(}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-}$$
$$=\Delta_z\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}-\Delta_\zeta\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)},$$

infolge der Gleichungen (13) aber:

$$(16)\quad \Delta_z\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}-\Delta_\zeta\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}=\Delta'_{z_1}\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}-\Delta'_\zeta\frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-}$$
$$+\frac{1}{\zeta_1-\zeta}\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(z_1)z^\nu-\frac{1}{z_1-z}\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(\zeta_1)\zeta^\nu.$$

Unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz der Entwicklung (I) ist nun:

---

[9]) Vgl. die in Anmerkung [4]) genannte Arbeit des Verfassers, S. 299 ff.

$$\Delta_z \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} V_{ns}(z_1,\zeta_1)\, u_{ns}(\zeta)\, \Delta u_{ns}(z),$$

$$\Delta_\zeta \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} V_{ns}(z_1,\zeta_1)\, u_{ns}(z)\, \Delta u_{ns}(\zeta),$$

$$\Delta'_{z_1} \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta)\, \Delta'_{z_1} V_{ns}(z_1,\zeta_1),$$

$$\Delta'_{\zeta_1} \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta)\, \Delta'_{\zeta_1} V_{ns}(z_1,\zeta_1).$$

wird daher:

$$\Delta'_{z_1} V_{ns}(z_1,\zeta_1) - \Delta'_{\zeta_1} V_{ns}(z_1,\zeta_1)$$

$$d\eta \int_{z_1'}^{z_2} (Q(z)-Q(\zeta))\, u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta) \left(\Delta'_{z_1} \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)} - \Delta'_{\zeta_1} \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}\right) d\varepsilon$$

$$d\eta \int_{z_1'}^{z_2} (Q(z)-Q(\zeta))\, u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta) \left[\Delta_z \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)} - \Delta_\zeta \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\zeta_1-\zeta} \sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu(z_1) z^\nu + \frac{1}{z_1-z} \sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu(\zeta_1) \zeta^\nu \right] d\varepsilon$$

er gliedweise integriert:

$$l\eta \int_{z_1'}^{z_2} (Q(z)-Q(\zeta))\, u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta) [u_{ns}(\zeta) \Delta u_{ns}(z) - u_{ns}(z) \Delta u_{ns}(\zeta)]\, V_{ns}(z_1,\zeta)\, d\varepsilon$$

$$- \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu(\zeta_1) A_\nu(z_1) + \sum_{\nu=0}^{m-1} b_\nu(z_1) A_\nu(\zeta_1),$$

ist:

$$a_\nu(\zeta_1) = \int_{z_3}^{z_4} d\eta \int_{z_1'}^{z_2} (Q(z)-Q(\zeta))\, u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta) \frac{z^\nu}{\zeta_1-\zeta} d\varepsilon,$$

$$b_\nu(z_1) = \int_{z_3}^{z_4} d\eta \int_{z_1'}^{z_2} (Q(z)-Q(\zeta))\, u_{ns}(z)\, u_{ns}(\zeta) \frac{\zeta^\nu}{z_1-z} d\varepsilon.$$

Infolge von (15) ist aber $u_{ns}(\zeta) \Delta u_{ns}(z) - u_{ns}(z) \Delta u_{ns}(\zeta) = 0$.

zen wir:

$$(18)\quad \begin{cases} w_1(z_1)=\int\limits_{z_1'}^{z_2}\frac{Q(z)\,u_{ns}(z)}{z_1-z}\,d\varepsilon, \qquad w_2(z_1)=\int\limits_{z_1'}^{z_2}\frac{u_{ns}(z)}{z_1-z}\,d\varepsilon, \\ w_3(\zeta_1)=\int\limits_{z_3}^{z_4}\frac{Q(\zeta)\,u_{ns}(\zeta)}{\zeta_1-\zeta}\,d\eta, \qquad w_4(\zeta_1)=\int\limits_{z_3}^{z_4}\frac{u_{ns}(\zeta)}{\zeta_1-\zeta}\,d\eta, \end{cases}$$

so wird:

$$(9\,a)\qquad V_{ns}(z_1,\zeta_1)=\frac{1}{c_{ns}}\begin{vmatrix} w_1(z_1) & w_2(z_1) \\ w_3(\zeta_1) & w_4(\zeta_1)\end{vmatrix}.$$

Aus (17) erhält man also:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_{ns}}&[w_4(\zeta_1)\,\Delta' w_1(z_1)-w_3(\zeta_1)\,\Delta' w_2(z_1)+w_2(z_1)\,\Delta' w_3(\zeta_1)-w_1(z_1)\,\Delta' w_4(\zeta_1)\\ &=\frac{1}{c_{ns}}\Big[-w_4(\zeta_1)\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(z_1)\int\limits_{z_1'}^{z_2}Q(z)\,u_{ns}(z)\,z^\nu\,d\varepsilon\\ &\quad+w_3(\zeta_1)\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(z_1)\int\limits_{z_1'}^{z_2}u_{ns}(z)\,z^\nu\,d\varepsilon\\ &\quad-w_2(z_1)\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(\zeta_1)\int\limits_{z_3}^{z_4}Q(\zeta)\,u_{ns}(\zeta)\,\zeta^\nu\,d\eta\\ &\quad+w_1(z_1)\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(\zeta_1)\int\limits_{z_3}^{z_4}u_{ns}(\zeta)\,\zeta^\nu\,d\eta\Big],\end{aligned}$$

wenn man beobachtet, daß

$$a_\nu(\zeta_1)=w_4(\zeta_1)\int\limits_{z_1'}^{z_2}Q(z)\,u_{ns}(z)\,z^\nu\,d\varepsilon-w_3(\zeta_1)\int\limits_{z_1'}^{z_2}u_{ns}(z)\,z^\nu\,d\varepsilon,$$

$$b_\nu(z_1)=w_1(z_1)\int\limits_{z_3}^{z_4}u_{ns}(\zeta)\,\zeta^\nu\,d\eta-w_2(z_1)\int\limits_{z_3}^{z_4}Q(\zeta)\,u_{ns}(\zeta)\,d\eta.$$

Hieraus folgt, daß die Funktionen w_1, w_2, w_3, w_4 den Differentialgleichungen genügen:

$$(19\,a)\qquad \Delta' w_1(z_1)+\mu^2 w_1(z_1)=-\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(z_1)\int\limits_{z_1'}^{z_2}Q(z)\,u_{ns}(z)\,z^\nu\,d\varepsilon,$$

$$(19\,b)\qquad \Delta' w_2(z_1)+\mu^2 w_2(z_1)=-\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(z_1)\int\limits_{z_1'}^{z_2}u_{ns}(z)\,z^\nu\,d\varepsilon,$$

$$(19\,c)\qquad \Delta' w_3(\zeta_1)+\mu^2 w_3(\zeta_1)=-\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(\zeta_1)\int\limits_{z_3}^{z_4}Q(\zeta)\,u_{ns}(\zeta)\,\zeta^\nu\,d\eta,$$

$$(19\,d)\qquad \Delta' w_4(\zeta_1)+\mu^2 w_4(\zeta_1)=-\sum_{\nu=0}^{m-1}A_\nu(\zeta_1)\int\limits_{z_3}^{z_4}u_{ns}(\zeta)\,\zeta^\nu\,d\eta.$$

Durch die Substitution

$$w_\nu = \frac{1}{\sqrt{P_2(z)}}\, w_\nu^*$$

hen die Differentialgleichungen (19) über in die folgenden:

0) $$P_2(z)\frac{d^2 w_\nu^*}{dz^2} + \frac{1}{2}P_2'(z)\frac{dw_\nu^*}{dz} + (P_0(z) + \lambda^2 Q(z) + \mu^2) w_\nu^*$$

$$= \sqrt{P_2(z)}\,\Phi_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

$\Phi_\nu(z)$ jedesmal eine ganze Funktion höchstens von $m-1$-ten Grade in darstellt.

Die zugeordneten Funktionen $w_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ sind also Lösungen von im allgemeinen nicht homogenen Differentialgleichungen, deren rechte Seite sich in die Form der ursprünglichen Differentialgleichung überführen läßt.

§ 4.

Asymptotische Darstellung der Funktionen u_{ns}, V_{ns}.

Die Differentialgleichung (1) lautet bei Berücksichtigung von (3) und (4):

a) $$P_2(z)\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{2}P_2'(z)\frac{dy}{dz}$$

$$+ \Big[P_0(z) + \Big(\alpha\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2 + (\beta-\alpha)n + \gamma - \frac{\alpha}{4}\Big) Q(z)$$

$$+ \alpha_1\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2 + (\beta_1-\alpha_1)n + \gamma_1 - \frac{\alpha_1}{4}\Big] y = 0;$$

e geht durch die Substitution

1) $$y = \frac{u}{\sqrt[4]{\alpha Q(z)+\alpha_1}}, \qquad t = \int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{\alpha Q(z)+\alpha_1}}{\sqrt{P_2(z)}}\, dz$$

ber in:

2) $$\frac{d^2 u}{dt^2} + \Big\{\frac{T(z) + ((\beta-\alpha)Q(z) + \beta_1 - \alpha_1)n}{\alpha Q(z)+\alpha_1} + \Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2\Big\} u = 0,$$

o ist:

3) $$T(z) = P_0(z) + \Big(\gamma - \frac{\alpha}{4}\Big) Q(z) + \gamma_1 - \frac{\alpha_1}{4}$$

$$- \frac{\alpha}{4}\sqrt{P_2(z)}\,\sqrt[4]{\alpha Q(z)+\alpha_1}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{P_2(z)}\,Q'(z)}{\sqrt[4]{\alpha Q(z)+\alpha_1}^5}\right).$$

Da der wirkliche Wert von α_1 im allgemeinen nicht genau angegeben

werden kann, so wollen wir die Annahme machen, es gäbe eine von α_1 unabhängige Funktion $R(z)$ derart, daß, wenn wir setzen:

$$\log \tau = \int_{z_0}^{z} \frac{R(z)}{\sqrt{P_2(z)}} \quad \text{und daher} \quad e^{it} = \tau \cdot e^{i \int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{\alpha Q(z)+\alpha_1}+i R(z)}{\sqrt{P_2(z)}} dz},$$

die geschlossenen Kurven $|\tau| = \text{konst.}$ (Kurven C) von den Kurven $|e^{it}| = \text{konst.}$ umschlossen werden, wenn die Konstante jedesmal die gleiche ist, und die Kurven $|\tau| = c_2$ und $|e^{it}| = c_2$ die Kurven $|\tau| = c_1$ bzw. $|e^{it}| = c_1$ umschließen, wenn $c_2 > c_1$ ist. Außerdem sollen die Wurzeln von $\alpha Q(z) + \alpha_1 = 0$ reell sein.

Es gilt nun auf den Kurven $|e^{it}| = \text{konst.}$ ($t = \varphi + i\psi$; ψ konst. u. > 0) die Darstellung[10]):

$$(24a) \qquad u = \frac{c_1}{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi} + \frac{c_2}{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-(n+\frac{1}{2})i\varphi}$$

$$+ \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})i\varphi}}{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\varphi} \frac{T(z) + ((\beta-\alpha) Q(z) + \beta_1 - \alpha_1) n}{\alpha Q(z) + \alpha_1} u \cdot e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi} d\varphi$$

$$- \frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi}}{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\varphi} \frac{T(z) + ((\beta-\alpha) Q(z) + \beta_1 - \alpha_1) n}{\alpha Q(z) + \alpha_1} u \cdot e^{-(n+\frac{1}{2})i\varphi} d\varphi,$$

$$(24b) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{c_1}{2} e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi} - \frac{c_2}{2} e^{-(n+\frac{1}{2})i\varphi}$$

$$- \frac{1}{2} e^{-(n+\frac{1}{2})i\varphi} \int_0^{\varphi} \frac{T(z) + ((\beta-\alpha) Q(z) + \beta_1 - \alpha_1) n}{\alpha Q(z) + \alpha_1} u \cdot e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi} d\varphi$$

$$- \frac{1}{2} e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi} \int_0^{\varphi} \frac{T(z) + ((\beta-\alpha) Q(z) + \beta_1 - \alpha_1) n}{\alpha Q(z) + \alpha_1} u \cdot e^{-(n+\frac{1}{2})i\varphi} d\varphi.$$

Nun kann man die Funktionen $u(t)$ für hinreichend große n so normieren, daß

$$(25) \qquad u(i\psi) = e^{(n+\frac{1}{2})\psi}, \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=i\psi} = -i\left(n+\frac{1}{2}\right) e^{(n+\frac{1}{2})\psi};$$

[10]) Bei negativen Werten von ψ bleibt das Folgende ebenfalls gültig, wenn man nur ψ durch $-\psi$ ersetzt.

an erhält dann in bekannter Weise aus (24):

6a) $$|u| \leqq A \cdot e^{(n+\frac{1}{2})\psi},$$

6b) $$\left|\frac{du}{dt}\right| \leqq B \cdot e^{(n+\frac{1}{2})\psi}.$$

abei ist allerdings notwendig, daß der größte Wert von

$$\left|\frac{(\beta-\alpha)Q(z)+\beta_1-\alpha_1)}{\alpha Q(z)+\alpha_1)}\right| < 1$$

, was aber stets erreicht werden kann, wenn man statt $n+\frac{1}{2}$ $n+p$ nführt und über p entsprechend verfügt. Ausgenommen sind nur die erte, für die z reell und $\alpha Q(z)+\alpha_1 = 0$ wird.

Aus den Gleichungen (26) folgt unter Berücksichtigung der Gl. (21),) und (10)[11]):

8a) $$|u_{ns}(z)| \leqq \frac{A}{\left|\sqrt[4]{\alpha Q(z)+\alpha_1}\right|} e^{(n+p)\psi_z},$$

8b) $$|u_{ns}(\zeta)| \leqq \frac{A}{\left|\sqrt[4]{\alpha Q(z)+\alpha_1}\right|} e^{(n+p)\psi_\zeta},$$

7c) $$|V_{ns}(z,\zeta)| \leqq C e^{-(n+p)(\psi_z+\psi\zeta)},$$

p eine feste, von n unabhängige Zahl bedeutet und A, C positive, rischen endlichen, von n unabhängigen Schranken gelegene Größen sind. naloges gilt von den Ableitungen.

Aus den Formeln (28) *folgt ohne weiteres der Satz* I.

§ 5.

Beispiel: Die Laméschen Funktionen $E_s^n(z)$ der I. Klasse, $K_s^n(z)$.

Die Laméschen Funktionen $E_s^n(z)$ sind Lösungen der Differentialeichung:

9) $$(z^2-b^2)(z^2-c^2)\frac{d^2y}{dz^2}+z(2z^2-b^2-c^2)\frac{dy}{dz}$$
$$+((b^2+c^2)\nu_s^n - n(n+1)z^2)y = 0.$$

abei ist ν_s^n Wurzel einer gewissen algebraischen Gleichung, und es ist ir große n):

0) $$\nu_s^n \sim \alpha_1 n^2+\beta_1 n+\gamma_1 = \alpha_1\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+(\beta_1-\alpha_1)n+\gamma-\frac{\alpha_1}{4},$$

[11]) Die Indizes z und ζ an ψ sind angefügt, um die entsprechende Ebene andeuten.

wo $0 \leqq \alpha_1 \leqq 1$ ist, wenn b, c reell sind[12]). Ist $\sigma = \frac{n}{2}$ bei geradem n, $\sigma = \frac{1}{2}(n-1)$ bei ungeradem n, so hat (29) $\sigma + 1$ Funktionen $K_s^n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \ldots$ als Lösung.

Durch die Substitution

$$(31) \qquad t = \int_c^z \frac{\sqrt{(b^2+c^2)\alpha_1 - z^2}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\, dz, \qquad y = \frac{u}{\sqrt[4]{(b^2+c^2)\alpha_1 - z^2}}$$

geht (29) über in:

$$(32) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + \Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{z^2 + 4(b^2+c^2)(\beta_1-\alpha_1) + (4\gamma_1-\alpha_1)(b^2+c^2)}{4\,((b^2+c^2)\alpha_1 - z^2)} + \frac{z^4 - b^2c^2}{2\,((b^2+c^2)\alpha_1 - z^2)^2} - \frac{5z^2(z^2-b^2)(z^2-c^2)}{4\,((b^2+c^2)\alpha_1 - z^2)^3}\Big] u = 0.$$

Es ist nun:

$$e^{it} = \tau e^{\int_c^z \frac{z - \sqrt{z^2 - \alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\, dz},$$

mit

$$\tau = \frac{\sqrt{z^2-b^2} - \sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}} = e^{-\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}}.$$

$|\tau| = \varrho$ $(0 \leqq \varrho \leqq 1$ oder $1 \leqq \varrho \leqq \infty)$ gibt ein Kurvensystem, das gestaltlich dem Systeme konfokaler Cassinischer Kurven sehr ähnlich ist[13]. Die Kurven $|e^{it}| = \varrho$ können nun die Kurven $|\tau| = \varrho$ nicht treffen, solange $\int_c^z \frac{z - \sqrt{z^2 - \alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\, dz$ einen von Null verschiedenen reellen Teil besitzt. Die Kurven $|e^{it}| = \varrho$ werden also ganz im Innern oder Äußere der Kurven $|\tau| = \varrho$ verlaufen, je nachdem die Schnittpunkte mit den Achsen innerhalb oder außerhalb liegen[14]). Wir betrachten den Fall, da

---

[12]) Vgl. E. Hilb, Beiträge zur Theorie der Laméschen Funktionen. Diss. München 1903, S. 10 ff.

[13]) Vgl. F. v. Lindemann, l. c. S. 333.

[14]) Unter der Voraussetzung, daß im Innern der Kurven $|\tau| = \varrho$ nicht Kurventeile von $|e^{it}| = \varrho$ liegen, die die X-Achse nicht treffen. Dies folgt aber mit Benützung des folgenden sofort daraus, daß $\Re \int_x^{x+iy} \frac{z - \sqrt{z^2 - \alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\, dz > 0$ ist, also alle Parallelen zur Y-Achse zuerst die Kurven $|\tau| = \varrho$ treffen müssen.

$(b^2+c^2)>c^2$ und $\varrho<1$ ist.

1. Für z reell und $>\sqrt{(b^2+c^2)\alpha_1}$ ist:

$$\Re\int_c^z \frac{z-\sqrt{z^2-\alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz = \int_{\sqrt{\alpha_1(b^2+c^2)}}^z \frac{z-\sqrt{z^2-\alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz + \int_c^z \frac{z}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz > 0;$$

$|e^{it}|=\varrho$ schneidet die reelle Achse in einem Punkte, dessen Abszisse größer ist als die entsprechende von $|\tau|=\varrho$.

2. Für $c<z<\sqrt{\alpha_1(b^2+c^2)}$ ist:

$$\Re\int_c^z \frac{z-\sqrt{z^2-\alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2+c^2)}}\,dz = \int_c^z \frac{z\,dt}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}.$$

Die Kurve $|e^{it}|=\varrho$ hat in diesem Intervalle keinen Schnittpunkt mit der reellen Achse.

3. Für $b<z<c$ ist:

$$\Re\int_c^z \frac{z-\sqrt{z^2-\alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz = -\int_c^z \frac{\sqrt{\alpha_1(b^2+c^2)-z^2}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz > 0;$$

wir erhalten also wieder keinen Schnittpunkt.

4. Für $0\leqq z<b$ ist:

$$\Re\int_c^z \frac{z-\sqrt{z^2-\alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz$$

$$=\int_b^c \frac{\sqrt{\alpha_1(b^2+c^2)-z^2}}{\sqrt{(z^2-b^2)(c^2-z^2)}}\,dz - \int_b^z \frac{z}{\sqrt{(b^2-z^2)(c^2-z^2)}}\,dz > 0,$$

Wir erhalten also wieder keinen Schnittpunkt mit der reellen Achse.

5. Ist z rein imaginär, $z=iy$, so wird:

$$\Re\int_c^z \frac{z-\sqrt{z^2-\alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz = \int_b^c \frac{\sqrt{\alpha_1(b^2+c^2)-z^2}}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz + \int_0^b \frac{z\,dz}{\sqrt{(c^2-z^2)(b^2-z^2)}}$$

$$+\int_0^y \frac{-y+\sqrt{y^2+\alpha_1(b^2+c^2)}}{\sqrt{(y^2+b^2)(y^2+c^2)}}\,dy > 0.$$

Die Kurve $|e^{it}| = \varrho$ trifft die y-Achse in einem Punkte, dessen Ordinate größer ist als die entsprechende von $|\tau| = \varrho$. Analoges gilt, wenn $\alpha_1(b^2 + c^2) < c^2$ und $\varrho > 1$ ist[15]).

Es gilt also der Satz[16]):

Die Kurven $|e^{it}| = \varrho$ *umschließen die Kurven* $|\tau| = \varrho$.

Die Kurve $|e^{it}| = \varrho_1$ umschließt die Kurve $|e^{it}| = \varrho_2$, wenn $\varrho_1 < \varrho_2 < 1$ (bzw. $\varrho_1 > \varrho_2 > 1$) ist. Zunächst können sich die beiden Kurven nicht treffen, da sonst dasselbe von den Kurven $|\tau| = \varrho_1$ und $|\tau| = \varrho_2$ gelten müßte. Würde nun die Kurve $|e^{it}| = \varrho_1$ im Innern der Kurve $|e^{it}| = \varrho_2$ verlaufen, so wäre für den Schnittpunkt mit der X-Achse $|\tau| > \varrho_1$ (bzw. $< \varrho_1$); das ist aber ein Widerspruch, da die Kurve $|e^{it}| = \varrho_1$ nach dem vorher Gesagten außerhalb der Kurve $|\tau| = \varrho_1$ verläuft.

Um die Funktionen $K_s^n(z)$ entsprechend den Gleichungen (25) zu normieren, braucht man nur zu beachten, daß sein muß:

$$\lim_{z \to \infty} (z^{-n} K_s^n(z)) = a_0.$$

Nun ist:

$$\lim_{z \to \infty} (\tau \cdot z) = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2} = \lim_{z \to \infty} (e^{it} z);$$

es ist daher:

$$a_0 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{i}.$$

Da für reelle Werte von z die ganz analogen asymptotischen Darstellungen gelten[17]), *so folgt, daß die in* § 2 *aufgestellten Sätze* II *und* III *gelten, wobei die Bereiche für die Gültigkeit der Entwicklungen gena-*

---

[15]) Für $\varrho > 1$ ist $\tau = \dfrac{\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}} = e^{\int_c^z \frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)}}}$ zu setzen.

[16]) In den Sonderfällen $\alpha_1(b^2 + c^2) = \begin{cases} c^2 \\ b^2 \end{cases}$ ergeben sich die konfokalen Ellipsensysteme:

$$\frac{x^2}{[(c \mp \sqrt{c^2 - b^2})\varrho + (c \pm \sqrt{c^2 - b^2})\varrho^{-1})]^2} + \frac{y^2}{[(c \mp \sqrt{c^2 - b^2})\varrho - (c \pm \sqrt{c^2 - b^2})\varrho^{-1}]^2} =$$

$$\frac{x^2}{(\varrho + \varrho^{-1})^2} + \frac{y^2}{(\varrho - \varrho^{-1})^2} = \frac{c^2}{4},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $\varrho \gtrless 1$ ist. Diese Ellipsen umschließen ebenfalls die entsprechenden Kurven $|\tau| = \varrho$.

[17]) Vgl. Ch. Jaccottet, Über die allgemeine Reihenentwicklung der Potentialfunktion nach Lamé'schen Produkten. Diss. Göttingen 1895, S. 9 ff.

eselben sind, die F. v. Lindemann im Falle einer Veränderlichen halten hat und die durch

$$\tau = \frac{\sqrt{z^2-b^2}-\sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}$$

stimmt sind.

Die zugeordneten Funktionen sind:

$$_s(z,\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^2 c_{ns}} \int_0^b \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-b^2)(\zeta^2-c^2)}} \int_b^c \frac{K_s^n(z)\,K_s^n(\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)(z_1-z)} \frac{(\zeta^2-z^2)}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}\,dz$$

it

$$c_{ns} = \int_0^b \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-b^2)(\zeta^2-c^2)}} \int_b^c \frac{K_s^n(z)^2\,K_s^n(\zeta)^2}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}} (\zeta^2-z^2)\,dz.$$ [18])

[18]) Vgl. E. Heine, l. c. I, S. 380.

(Eingegangen am 3. September 1924.)

Über die reellen Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z)$.

Von

Alwin Walther in Göttingen.

Auf die *unvollständigen Gammafunktionen* $P(z)$ und $Q(z)$ der kom plexen Veränderlichen $z = x + iy$, welche zu den interessantesten speziellen Funktionen der ganzen Analysis gehören, wird man beim Aufbau de Theorie der Gammafunktion $\Gamma(z)$ vom zweiten Eulerschen Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \qquad (x > 0$$

aus geführt[1]). Man definiert

$$(1) \qquad P(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt \qquad (x > 0$$

$$(2) \qquad Q(z) = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt .$$

Die Funktion $Q(z)$ ist eine ganze transzendente Funktion vom Geschlecht die mit $\Gamma(z)$ das asymptotische Verhalten gemein hat, während d Funktion $P(z)$ den Charakter der Gammafunktion im Endlichen wide spiegelt: sie ist eine meromorfe Funktion von z mit denselben einfache Polen $z = -n$ und denselben Residuen $\frac{(-1)^n}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ wie d Gammafunktion selbst.

Wir wollen uns in dieser Abhandlung mit den Nullstellen d Funktion $P(z)$ für reelle $z = x$ beschäftigen. Für positive x verschwind $P(x)$, wie unmittelbar aus der Integraldarstellung (1) hervorgeht, nich Für negative x besteht die Kurve für $P(x)$ ähnlich wie die der Gamm funktion aus getrennten Zügen, die sich haarnadelähnlich zwischen

---

[1]) Vgl. N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 19 S. 391—394.

ei aufeinanderfolgenden Senkrechten durch die Pole abwechselnd unter-
lb und oberhalb der Abszissenachse erstrecken. Bei der Gammafunktion
ichen die „Haarnadeln" nicht bis an die Abszissenachse hinauf bzw.
hab[2]). Anders bei der Funktion $P(x)$. Zwar die nach oben konvexen
aarnadeln für die Intervalle $-2m-1 < x < -2m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$,
e negativen Werten von $P(x)$ entsprechen, bleiben auch hier ganz
terhalb der Abszissenachse. Aber die Haarnadeln für die Intervalle
$2m-2 < x < -2m-1$, denen nach den Intervallenden zu positive
erte von $P(x)$ zugeordnet sind, schneiden von $m = 2$ an die Abszissen-
hse. In dieser Hinsicht stellt der folgende Satz von T. H. Gronwall[3])
s genaueste bisher bekannte Ergebnis dar: *Jedes Intervall*

$$-2m-1-\frac{6}{(2m)!} \leqq x \leqq -2m-1-\frac{1}{(2m)!}$$

d

$$-2m-2+\frac{1}{(2m+1)!} \leqq x \leqq -2m-2+\frac{6}{(2m+1)!}$$

thält für $m = 2, 3, 4, \ldots$ eine einzige einfache Nullstelle der Funktion
(z), und diese Funktion hat keine weiteren reellen Nullstellen.

Unser Ziel ist, *erstens* die Gronwallschen Schranken für den Ab-
nd der Nullstellen von der nächsten ganzen Zahl zu verengern, *zweitens*
n asymptotischen Wert dieses Abstandes zu ermitteln. Wir beweisen:

Die reellen Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion $P(z)$
gen in den Intervallen

)
$$-2m-1-\frac{4}{(2m)!} < x < -2m-1-\frac{2}{(2m)!}$$

d

)
$$-2m-2+\frac{2}{(2m+1)!} < x < -2m-2+\frac{4}{(2m+1)!}$$

r $m = 2, 3, 4, \ldots$. *Der asymptotische Wert des Abstandes einer der-*
igen Nullstelle von der nächsten ganzen Zahl $-p$, der hiernach in
Schranken $\frac{2}{(p-1)!}$ und $\frac{4}{(p-1)!}$ eingeschlossen ist, beträgt $\frac{e}{(p-1)!}$ für
$\to \infty$.

Zum Beweise ziehen wir die aus der Integraldarstellung (1) durch
ihenentwicklung der Exponentialfunktion und gliedweise Integration

[2]) Vgl. die grafische Darstellung des Verlaufes der Gammafunktion, z. B. in A. Serret-G. Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 3. Aufl., pzig 1907, S. 256; 4./5. Aufl., Leipzig u. Berlin 1911, S. 259; 6./7. Aufl., Leipzig u. rlin 1921, S. 259.

[3]) T. H. Gronwall, Sur les zéros des fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ associées à la ction gamma, Ann. Éc. Norm. (3) **33** (1916), S. 381–393. Daselbst auch Literatur-gaben über frühere Arbeiten auf diesem Gebiete. Vgl. ferner N. Nielsen, Hand-ch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, S. 32–36.

entspringende, für alle endlichen, von den Polen verschiedenen z gültig Partialbruchreihe

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{1}{z+\nu} \tag{3}$$

heran. Wir setzen in ihr

$$z=x=-2m-1-\xi \qquad (0<\xi<1;\ m=2,3,4,\ldots \tag{4}$$

und leiten durch Abschätzung nacheinander folgende Ungleichungen her

I 2. *Für* $\xi=\frac{2}{(2m)!}$ *ist*

$$P\Big(-2m-1-\frac{2}{(2m)!}\Big)\geqq 0. \tag{I 2}$$

II 1. *Für* $\xi=1-\frac{2}{(2m+1)!}$ *ist*

$$P\Big(-2m-2+\frac{2}{(2m+1)!}\Big)\geqq 0. \tag{II 1}$$

I 1. *Für* $\xi=\frac{4}{(2m)!}$ *ist*

$$P\Big(-2m-1-\frac{4}{(2m)!}\Big)\leqq 0. \tag{I 1}$$

II 2. *Für* $\xi=1-\frac{4}{(2m+1)!}$ *ist*

$$P\Big(-2m-2+\frac{4}{(2m+1)!}\Big)\leqq 0. \tag{II 2}$$

Beweis von I 2. Die Annahme (4) liefert die Entwicklung

$$P(-2m-1-\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{1}{2m+1+\xi-\nu} \tag{5}$$

$$=-\frac{1}{2m+1+\xi}+\Big\{\frac{1}{2m+\xi}-\frac{1}{2(2m-1+\xi)}+\frac{1}{6(2m-2+\xi)}-\cdots-\frac{1}{(2m)!(1$$

$$+\frac{1}{(2m+1)!\,\xi}+\frac{1}{(2m+2)!(1-\xi)}-\frac{1}{(2m+3)!(2-\xi)}+\cdots.$$

In der geschweiften Klammer ist jedes Glied absolut kleiner als d vorangehende; denn die hierfür erforderliche Ungleichung

$$\frac{1}{(\nu+1)!(2m+\xi-\nu)}<\frac{1}{\nu!(2m+1+\xi-\nu)} \qquad (\nu=1,2,\ldots,2m-$$

ist gleichbedeutend mit der offenbar richtigen Beziehung

$$1<\nu(2m+\xi-\nu).$$

ner erreicht die für $0 \leqq \xi \leqq 1$ und festes $m \geqq 2$ negative und wachsende
ıktion

$$-\frac{1}{2(2m-1+\xi)}+\frac{1}{6(2m-2+\xi)}$$

n kleinsten Wert für $\xi = 0$, ihren größten Wert für $\xi = 1$. Aus der
gleichung

$$P(-2m-1-\xi) \geqq -\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{2m+\xi}-\frac{1}{2(2m-1+\xi)}$$
$$+\frac{1}{6(2m-2+\xi)}-\frac{1}{24(2m-3+\xi)}+\frac{1}{(2m+1)!\,\xi}$$

t daher für $\xi = \frac{2}{(2m)!}$ und $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$\left(-2m-1-\frac{2}{(2m)!}\right) \geqq \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}-\frac{1}{2(2m-1)}$$
$$+\frac{1}{6(2m-2)}-\frac{1}{24(2m-3)}+\frac{1}{2(2m+1)}$$
$$=\frac{12m^4-8m^3-95m^2+182m-103}{24(4m^2-1)(m^2-1)(2m-3)} \geqq 0,$$

nit die Behauptung (I 2) bewiesen ist.

Beweis von II 1. Hier benutzen wir die aus (5) entfließende Ungleiıng

$$P(-2m-1-\xi) \geqq -\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{2m+\xi}-\frac{1}{2(2m-1+\xi)}$$
$$+\frac{1}{6(2m-2+\xi)}-\frac{1}{24(2m-3+\xi)}+\frac{1}{(2m+2)!\,(1-\xi)},$$

für $\xi = 1-\frac{2}{(2m+1)!}$ zu der Beziehung

$$-2m-2+\frac{2}{(2m+1)!}\Big) \geqq \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}-\frac{1}{2(2m-1)}$$
$$\frac{1}{6(2m-2)}-\frac{1}{24(2m-3)}+\frac{1}{2(2m+2)}=\frac{12m^4-32m^3-23m^2+116m-85}{24(4m^2-1)(m^2-1)(2m-3)}$$

rt. Bei $m \geqq 3$ ist der letzte Zähler positiv und damit die gewünschte
ation (II 1) bewiesen. Bei $m = 2$ greifen wir auf die Beziehung (7)
ück und tragen in ihr für ξ den Wert $1-\frac{2}{(2m+1)!}=1-\frac{1}{60}$ ein;
n ergibt sich durch numerische Rechnung

$$-6+\frac{1}{60}\Big) \geqq \frac{1}{\left(6-\frac{1}{60}\right)\left(5-\frac{1}{60}\right)}-\frac{1}{2\left(4-\frac{1}{60}\right)}$$
$$+\frac{1}{6\left(3-\frac{1}{60}\right)}-\frac{1}{24\left(2-\frac{1}{60}\right)}+\frac{1}{12} \geqq 0{,}0268 > 0.$$

Beweis von I 1. Zur Abschätzung nach oben schreiben wir

$$(8)\qquad P(-2m-1-\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\,\frac{1}{2m+1+\xi-\nu}$$

$$=-\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{2m+\xi}-\left\{\frac{1}{2(2m-1+\xi)}-\frac{1}{6(2m-2+\xi)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24(2m-3+\xi)}-\frac{1}{120(2m-4+\xi)}+\cdots-\frac{1}{(2m-1)!\,(2+\xi)}\right\}$$

$$-\frac{1}{(2m)!\,(1+\xi)}+\frac{1}{(2m+1)!\,\xi}+\frac{1}{(2m+2)!\,(1-\xi)}-\frac{1}{(2m+3)!\,(2-\xi)}+\cdots$$

wobei die Glieder in den geschweiften Klammern dem absoluten Betra nach abnehmen, und ersehen hieraus

$$(9)\quad P(-2m-1-\xi)\leqq-\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{2m+\xi}-\frac{1}{2(2m-1+\xi)}$$

$$+\frac{1}{6(2m-2+\xi)}+\frac{1}{(2m+1)!\,\xi}.$$

Nun wählen wir $\xi=\frac{4}{(2m)!}$ $(m=2,3,4,\ldots)$. Die Funktion (6) wäch für $0\leqq\xi\leqq1$; der größte in Frage kommende Wert von ξ ist $\xi=$ Daher gewinnen wir die Abschätzung

$$P\left(-2m-1-\frac{4}{(2m)!}\right)\leqq\frac{1}{2m(2m+1)}-\frac{3}{12m-5}+\frac{1}{12m-11}+\frac{1}{4(2m+1)}$$

$$=\frac{-48m^3+224m^2-217m+110}{4m(2m+1)(12m-5)(12m-11)}\leqq0$$

für $m\geqq4$. Bei $m=2$ und $m=3$ muß man mehr Glieder als in (berücksichtigen und erhält

$$P\left(-5-\frac{1}{6}\right)\leqq\frac{1}{\left(5+\frac{1}{6}\right)\left(4+\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{2\left(3+\frac{1}{6}\right)}+\frac{1}{6\left(2+\frac{1}{6}\right)}$$

$$-\frac{1}{24\left(1+\frac{1}{6}\right)}+\frac{1}{20}+\frac{1}{720\cdot\frac{5}{6}}\leqq-0{,}0183<$$

$$P\left(-7-\frac{1}{180}\right)\leqq\frac{1}{\left(7+\frac{1}{180}\right)\left(6+\frac{1}{180}\right)}-\frac{1}{2\left(5+\frac{1}{180}\right)}+\frac{1}{6\left(4+\frac{1}{180}\right)}$$

$$-\frac{1}{24\left(3+\frac{1}{180}\right)}+\frac{1}{120\left(2+\frac{1}{180}\right)}+\frac{1}{28}\leqq-0{,}0082<$$

Beweis von II 2. Für $\xi = 1 - \frac{4}{(2m+1)!}$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ entspringt s (8) die Ungleichung

$$\left(-2m-2+\frac{4}{(2m+1)!}\right) \leqq -\frac{1}{2m+1+\xi}+\frac{1}{2m+\xi}-\frac{1}{2(2m-1+\xi)} + \frac{1}{6(2m-2+\xi)}+\frac{1}{4(2m+2)}.$$

ei den ersten beiden Gliedern berücksichtigen wir die Tatsache, daß der einste mögliche Wert von ξ den Wert $\xi = 1 - \frac{1}{30}$ ist, beim dritten und erten Gliede hingegen den Umstand, daß die Funktion (6) für $\xi = 1$ am ößten wird. So kommt

$$\left(-2m-2+\frac{4}{(2m+1)!}\right) \leqq \frac{900}{(60m+59)(60m+29)}-\frac{1}{2\cdot 2m}+\frac{1}{6(2m-1)} + \frac{1}{4(2m+2)} = \frac{-7200m^4+14640m^3+13378m^2+1525m+10266}{24m(m+1)(2m-1)(60m+59)(60m+29)} \leqq 0$$

r $m \geqq 3$. Für $m = 2$ lehrt eine kurze numerische Rechnung

$$\left(-6+\frac{1}{30}\right) \leqq \frac{1}{\left(6-\frac{1}{30}\right)\left(5-\frac{1}{30}\right)}-\frac{1}{2\left(4-\frac{1}{30}\right)}+\frac{1}{6\left(3-\frac{1}{30}\right)}-\frac{1}{24\left(2-\frac{1}{30}\right)} + \frac{1}{120\left(1-\frac{1}{30}\right)}+\frac{1}{24} \leqq -0{,}0067 < 0.$$

Damit sind alle Behauptungen über das Vorzeichen von $P(x)$ be- esen, und wir wenden uns zur asymptotischen Abschätzung des Ab- ndes einer Nullstelle von $P(x)$ von der nächsten ganzen Zahl $-p$. tzen wir in der Partialbruchentwicklung (3)

$$z = x = -p+\xi \quad (0 < |\xi| < 1)$$

d ist x eine Nullstelle von $P(x)$, so ergibt sich

$$-\frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{\xi} = \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{1}{p-\nu-\xi}+\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{1}{\nu-p+\xi}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\xi^\mu}{(p-\nu)^\mu}+\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu-p)}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu\frac{\xi^\mu}{(\nu-p)^\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\xi^\mu\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)^{\mu+1}}+\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu\xi^\mu\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu-p)^{\mu+1}}.$$

ır den asymptotischen Wert von ξ bei großem p kommt nur das Glied t $\mu = 0$ der ersten Reihe rechts in Betracht. Wir können nämlich ıreiben

$$-\frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{\xi}=\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\xi^{\mu}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)^{\mu+1}}+\frac{1}{1-|\xi|}O\left(\frac{1}{(p+1)!}\right)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)}+\frac{|\xi|}{1-|\xi|}O(e)+\frac{1}{1-|\xi|}O\left(\frac{1}{(p+1)!}\right)=\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)}+O\left(\frac{1}{(p-1}\right.$$

weil nach unseren früheren Erörterungen

$$|\xi|=O\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)$$

ist. Daher haben wir nur noch den Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)}$$

asymptotisch für große p auszuwerten. Hierzu ziehen wir die Formel[4]

$$\frac{1}{p-\nu}=\nu!\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-\mu)!\,p\,(p-1)\cdots(p-\mu)}$$

heran; dann wird

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!\,(p-\nu)}&=\sum_{\nu=0}^{p-1}(-1)^{\nu+1}\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-\mu)!\,p\,(p-1)\cdots(p-\mu)}\\&=\sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\mu+1}}{p\,(p-1)\cdots(p-\mu)}\sum_{\nu=\mu}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}\\&=\sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\mu+1}}{p\,(p-1)\cdots(p-\mu)}\sum_{\nu=0}^{p-\mu-1}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\\&=-\frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}+O\left(\sum_{\mu=1}^{p-1}\frac{e^{-1}}{p\,(p-1)\cdots(p-\mu)}\right)\\&=-\frac{e^{-1}}{p}+O\left(\frac{1}{p\cdot p!}\right)+O\left(\frac{1}{p\,(p-1)}\right).\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir demnach

$$-\frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{\xi}=-\frac{e^{-1}}{p}+O\left(\frac{1}{p\,(p-1)}\right)$$

---

[4]) Zur Herleitung setze man in der Formel (vgl. N. E. Nörlund, a. a. O. S. 4)

$$f(x+n\omega)=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\omega^{s}\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}f(x),$$

welche die sukzessiven Funktionswerte durch Differenzen ausdrückt, $f(x)=\frac{1}{x}$ u $\omega=-1$.

ıd

0) $$\xi \sim (-1)^p \frac{e}{(p-1)!};$$

er asymptotische Wert des Abstandes einer Nullstelle von der nächsten anzen Zahl $-p$ beträgt also, wie behauptet, $\frac{e}{(p-1)!}$. Man sieht leicht, aß man hiernach in den Abschätzungen (I 2), (II 1), (I 1) und (II 2) att der Zeichen $\leqq$ und $\geqq 0$ die Zeichen $<$ bzw. $>$ schreiben darf nd so auf die Ungleichungen (I) und (II) kommt. In diesen kann die anze Zahl 4 als obere Schranke für e nicht durch 3 ersetzt werden, wie ıs den numerischen Werten der ersten Nullstellen hervorgeht [5]).

Dresden-Briesnitz, 17. September 1924.

---

[5]) Vgl. P. Franklin, Calculation of the complex zeros of the function $P(z)$ mplementary to the incomplete gamma function, Annals of math. (2) 21 (1919/20), 61—63.

(Eingegangen am 22. September 1924.)

Die Identitätsbedingungen der natürlichen Geometrie.

Von

Gerhard Kowalewski in Dresden.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man die Identitätsbedingungen der Pickschen natürlichen Geometrie[1]) aufstellen kann, ohne die kovarianten Koordinaten selbst berechnen zu müssen. Mein Verfahren ermöglicht ein direktes Hinschreiben der Identitätsbedingungen und erfordert keinerlei Integrationen. Da die Identitätsbedingungen, wie E. Cesàro[2]) im Falle der euklidischen Bewegungsgruppe so erfolgreich dargetan hat, das Hauptinstrument der natürlichen Geometrie bilden, so dürfte mein neues Ergebnis nicht ohne Interesse sein. Als Nebenresultat finde ich einen bemerkenswerten Satz über die Erzeugung einer ebenen Transformationsgruppe aus zwei infinitesimalen Transformationen mit Hilfe der Klammeroperation.

§ 1.

Die Identitätsformel.

G_r sei eine r-gliedrige ebene Transformationsgruppe, die eine transitive Vertauschung der Kurvenelemente $(r-2)$-ter Ordnung bewirkt. Um gewisse Ausnahmeerscheinungen beiseite zu schieben, werde $r > 2$ angenommen.

Mit e wollen wir ein Kurvenelement $(r-2)$-ter Ordnung bezeichnen und mit e_0 ein spezielles e „von allgemeiner Lage", d. h. ein solches, das unter Einwirkung von G_r in alle benachbarten e übergeht. e_0 nenne ich das *Anfangselement* und benutze es zur eindeutigen Festlegung der Fundamentalgrößen der natürlichen Geometrie.

---

[1]) Vgl. G. Pick, Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen. Wiener Akademie, 1. 2. 1906.

[2]) Vgl. meine deutsche Ausgabe seiner Geometria intrinseca. Leipzig 1901.

Als *Bogenelement* der Gruppe G_r bezeichne ich diejenige Invariante der Form $\omega(e)dx$, die sich für $e = e_0$ auf dx reduziert, als *Hauptferentialinvariante* diejenige Invariante von der Form $\alpha(e) + \beta(e)y_{r-1}$, für $e = e_0$ in y_{r-1} übergeht. Damit sind diese Größen eindeutig dert.

Die *Relativkoordinaten* (Picks kovariante Koordinaten) eines Punktes Y in bezug auf ein Kurvenelement e von $(r-2)$-ter Ordnung sind i Größen ξ, η, die in Anlehnung an allgemeine Cartansche Ideen ch folgende symbolische Gleichung bestimmt werden:

$$(\xi, \eta) = (X, Y)\, T_e^{e_0}.$$

sind die cartesischen Koordinaten des Punktes, der aus X, Y durch der Gruppe entnommene Transformation $T_e^{e_0}$ hervorgeht. Es ist das jenige Transformation aus G_r, die das Element e in das Anfangselent e_0 überführt. Solange e einer gewissen Umgebung von e_0 angehört, diese Transformation (in Nähe der Identität) eindeutig bestimmt, liegen auch die Relativkoordinaten ξ, η eindeutig fest.

Läßt man nun e längs einer Kurve variieren, während X, Y fest iben, so kann man ξ, η als Funktionen des Bogens

$$s = \int \omega(e)dx$$

ehen, der längs jener Kurve von einem beliebigen Anfangspunkt aus echnet wird. Die „Identitätsbedingungen" beziehen sich auf die Abungen $\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}$ dieser Funktionen und drücken sie durch ξ, η und durch Hauptdifferentialinvariante J aus. Ich will hier eine neue einfache rleitung dieser wichtigen Relationen geben, und zwar in der präzisen ssung, wie sie in meinen Arbeiten über natürliche Geometrie von Ang an gewählt wurde.

Bezeichnen wir mit $e + de$ das längs einer Kurve infinitesimal variierte ment e, so ist nach (1)

$$(\xi + d\xi,\ \eta + d\eta) = (X, Y)\, T_{e+de}^{e_0}.$$

s (1) und (2) folgt aber

$$(\xi + d\xi,\ \eta + d\eta) = (\xi, \eta)\, T_{e_0}^{e}\, T_{e+de}^{e_0},$$

l offenbar ist

$$T_{e_0}^{e}\, T_{e+de}^{e_0}$$

e infinitesimale Transformation der Gruppe G_r. Bezeichnen wir also mit

$$U_\varrho f = \xi_\varrho p + \eta_\varrho q \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

die infinitesimalen Grundtransformationen von G_r, so werden Beziehunge von folgender Form gelten[3]):

$$(4) \qquad \frac{d\xi}{ds} = \sum k_\varrho \xi_\varrho(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{ds} = \sum k_\varrho \eta_\varrho(\xi, \eta).$$

Dabei hängen die Koeffizienten k_ϱ, weil e und $e + de$ beteiligt sind, v $x, y, y_1, \ldots, y_{r-1}$ ab, den Koordinaten des durch e und $e + de$ bestimmt Kurvenelements $(r-1)$-ter Ordnung. Außerdem sind die k_ϱ natürli auch mit e_0 behaftet.

Wegen der Invarianteneigenschaft der Relativkoordinaten, die aus d Definitionsgleichung (1) leicht hervorgeht[4]) und sich auf $\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}$ überträ sind nun die k_ϱ gleichfalls Invarianten. Da aber in $\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}$ die Ableitu y_{r-1} linear auftritt, müssen auch die k_ϱ diese Ableitung linear enthalt und sich demgemäß linear durch die Hauptdifferentialinvariante J au drücken lassen:

$$k_\varrho = a_\varrho + b_\varrho J.$$

a_ϱ und b_ϱ hängen jetzt nur noch von e_0 ab. Versteht man unter $\mathfrak{U}_\varrho f$ d in deutschen Buchstaben geschriebene $U_\varrho f$, so daß

$$\mathfrak{U}_\varrho f = \xi_\varrho(\xi, \eta)\, p + \eta_\varrho(\xi, \eta)\, q$$

ist, und setzt

$$\mathfrak{A} f = \Sigma a_\varrho \mathfrak{U}_\varrho f, \quad \mathfrak{B} f = \Sigma b_\varrho \mathfrak{U}_\varrho f,$$

so lassen sich die Gleichungen (4) in eine einzige zusammenfassen, nä lich in

$$(5) \qquad \frac{df(\xi, \eta)}{ds} = \mathfrak{A} f + J \mathfrak{B} f.$$

f ist eine willkürliche Funktion von ξ, η. Ersetzt man sie einmal dur ξ, dann durch η, so ergeben sich die Gleichungen (4). Ich nenne (5) d *Identitätsformel*, weil in ihr die Identitätsbedingungen, d. h. die Gl chungen (4), enthalten sind.

§ 2.

Ein gruppentheoretischer Satz als Nebenergebnis.

Über die in der Identitätsformel auftretenden infinitesimalen Tra formationen $\mathfrak{A} f$ und $\mathfrak{B} f$ läßt sich sofort die Aussage machen, daß $\mathfrak{A} f =$

[3]) ds ist das Bogenelement $\omega(e)\, dx$ zwischen e und $e + de$.

[4]) Vgl. hierzu meine Abhandlung: Neue Grundlegung und neue Entwicklun möglichkeiten der Geometria intrinseca ebener Transformationsgruppen, Böhm. G d. Wiss. 17. 9. 1919. Vgl. auch §. 2 der vorliegenden Arbeit.

$f = 0$ außer $f =$ konst. keine gemeinsame Lösung haben können. Sonst äbe es nämlich eine Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, für die stets $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ wäre, wenn längs irgendeiner Kurve variiert. Das würde offenbar bedeuten, daß $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ von e ganz unabhängig ist; denn man kann durch Variieren längs assender Kurven das Element e in alle möglichen Nachbarlagen bringen. $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ wäre also eine Funktion von X, Y allein und andererseits eine nvariante, jedoch nicht etwa eine Konstante. Das ist aber durch die der ruppe G_r auferlegte Transitivitätsbedingung ausgeschlossen.

Da bei dieser Überlegung die Transitivität von G_r, die nicht nur ir die Punkte, sondern auch für die Kurvenelemente bis zur $(r-2)$-ten rdnung gilt, nicht voll ausgenutzt wird, liegt es nahe, die über $\mathfrak{A}f$ und $\mathfrak{B}f$ gemachte Aussage bis zur restlosen Ausnutzung der Transitivität zu ertiefen. Um das zu erreichen, muß man zu den Relativkoordinaten eines lements $(r-2)$-ter Ordnung übergehen. Man denke sich den Punkt $, Y$ auf einer Kurve beweglich. Dann wird auch der Punkt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, der it ihm durch die Beziehung (1) zusammenhängt, längs einer Kurve ariieren, und einem Element $X, Y, Y_1, \ldots, Y_{r-2}$ der ersten Kurve wird in Element $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{r-2}$ der zweiten Kurve entsprechen. Jenes ollen wir kurz E, dieses kurz e nennen. Die Koordinaten von e, also , $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{r-2}$, werden wir als die *Relativkoordinaten von E in bezug uf e* definieren. Diese Definition läßt sich durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{e} = (E)\, T_e^{e_0} \tag{1'}$$

usdrücken, die mit (1) in vollem Einklang steht. Auch diese Relativoordinaten haben die Invarianteneigenschaft, sie sind simultane Invarianten on E und e. Das läßt sich in wenigen Zeilen nachweisen[5]). Greifen ir aus der Gruppe G_r eine Transformation heraus, die e in e' überführt, o werden wir für sie das Symbol $T_e^{e'}$ anwenden. Es sei nun

$$E' = (E)\, T_e^{e'}.$$

Dann können wir Gleichung (1′) in folgende umschreiben:

$$\mathfrak{e} = (E')\, T_{e'}^{e}\, T_e^{e_0} = (E')\, T_{e'}^{e_0}$$

nd sehen auf diese Weise, daß e ungeändert bleibt, wenn man e und E eide derselben Transformation von G_r unterwirft.

An die Stelle der Identitätsformel (5) tritt, wenn es sich nicht mehr m einen Punkt X, Y, sondern um ein Element E von $(r-2)$-ter Ordung handelt, die folgende:

$$\frac{df(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{r-2})}{ds} = \mathfrak{A}^{(r-2)} f + J\mathfrak{B}^{(r-2)} f. \tag{5'}$$

[5]) Damit ist auch der oben nicht gegebene Beweis für die Invarianteneigenchaft von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ erbracht.

Dabei sind

$$\mathfrak{A}^{(r-2)}f, \quad \mathfrak{B}^{(r-2)}f$$

die in bekannter Weise gebildeten Erweiterungen von $\mathfrak{A}f$ und $\mathfrak{B}f$ auf die $(r-2)$-te Ordnung.

Es kann nun gezeigt werden, *daß die Differentialgleichungen*

$$\mathfrak{A}^{(r-2)}f = 0, \quad \mathfrak{B}^{(r-2)}f = 0 \tag{6}$$

keine gemeinsame Lösung außer $f =$ konst. *haben.* Wäre eine solche Lösung $\varphi(e)$ vorhanden, so würde beim Variieren des Elements e längs einer Kurve (unter Festhaltung von E) stets $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ sein. Daraus könnte man schließen, daß φ von e überhaupt gar nicht abhängt, sondern nur von E. Wir hätten also eine Invariante von E vor uns, die sich nicht auf eine Konstante reduziert. Das ist aber ausgeschlossen, weil die Gruppe G_r auf die Elemente $(r-2)$-ter Ordnung transitiv einwirkt, wie zu Anfang vorausgesetzt wurde. Wenn man also die Gleichungen (6) in bekannter Weise durch fortgesetzte Anwendung der Klammeroperation zu einem vollständigen System erweitert, so muß dieses r-gliedrig sein. Da nun $(\mathfrak{A}^{(r-2)}, \mathfrak{B}^{(r-2)})$ nichts anderes ist als die bis zur Ordnung $r-2$ erweiterte infinitesimale Transformation $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, die nach dem Lieschen Hauptsatz ebenfalls zu G_r gehört, so läßt sich unsere Feststellung auch so formulieren, daß aus $\mathfrak{A}f$ und $\mathfrak{B}f$ durch fortgesetztes Klammern die ganze Gruppe G_r entsteht. Damit ist folgender Satz gewonnen:

In jeder r-gliedrigen ebenen Transformationsgruppe, die auf die Kurvenelemente $(r-2)$-ter Ordnung transitiv einwirkt, gibt es zwei infinitesimale Transformationen, aus denen man durch fortgesetztes Klammern die ganze Gruppe erhält.

Es fragt sich, ob auch bei andern Gruppen, die der Transitivitätsbedingung nicht genügen, solche Fundamentalpaare infinitesimaler Transformationen vorhanden sind. Bildet man z. B. bei der Gruppe der Translationen und Streckungen

$$p, q, xp + yq \tag{7}$$

den Klammerausdruck aus zwei infinitesimalen Transformationen

$$U_1 f = a_1 p + b_1 q + c_1(xp + yq),$$
$$U_2 f = a_2 p + b_2 q + c_2(xp + yq),$$

so ergibt sich

$$(U_1 U_2) = (a_1 c_2 - a_2 c_1)p + (b_1 c_2 - b_2 c_1)q = c_2 U_1 f - c_1 U_2 f.$$

Man kommt also über $U_1 f, U_2 f$ nicht hinaus.

Auch bei der Gruppe

$$p, q, xq, \ldots, x^{r-3}q, \quad xp + (r-2)yq \qquad (r > 3),$$

ebenfalls in den Elementen $(r-2)$-ter Ordnung intransitiv ist, gibt kein Fundamentalpaar infinitesimaler Transformationen. Entnimmt man nämlich irgend zwei infinitesimale Transformationen

$$U_1 f = a_1 p + b_1 (xp + (r-2) yq) + P_1(x) q,$$
$$U_2 f = a_2 p + b_2 (xp + (r-2) yq) + P_2(x) q,$$

bei P_1, P_2 Polynome $(r-3)$-ten Grades bedeuten, so findet man

$$(U_1 U_2) = b_2 U_1 f - b_1 U_2 f + Q(x) q,$$

Q erweist sich als Polynom $(r-4)$-ten Grades. Es tritt also zu f und $U_2 f$ nur $Q(x)q$ hinzu, und bei weiterer Anwendung der Klammeration ergeben sich immer nur infinitesimale Transformationen von dieser Form. Man kommt also gewiß nicht über $U_1 f, U_2 f$ und $q, xq, \ldots, x^{r-4}q$ heraus, bleibt also in einer $(r-1)$-gliedrigen Untergruppe von (8).

Nach einem Satze von mir, der übrigens auch aus der Lieschen Gruppentafel abzulesen ist, sind (7) und (8) die einzigen transitiven Gruppentypen mit intransitiver Vertauschung der Elemente $(r-2)$-ter Ordnung. Bei keiner dieser Gruppen sind also Fundamentalpaare infinitesimaler Transformationen vorhanden.

Prüft man noch die drei Arten intransitiver Gruppen, die es nach Lies Feststellungen gibt, so stellt sich heraus, daß weder bei der Gruppe

$$\boxed{F_1(x) q, \ldots, F_r(x) q}$$

noch bei der Gruppe

$$\boxed{F_1(x) q, \ldots, F_{r-1}(x) q, yq}$$

Fundamentalpaare infinitesimaler Transformationen existieren, wohl aber bei der Gruppe

$$\boxed{q, yq, y^2 q},$$

z. B. q und $y^2 q$ ein solches Paar bilden.

Wir können also dem oben aufgestellten Satze den folgenden als Ergänzung beifügen:

Eine r-gliedrige ebene Transformationsgruppe mit intransitiver Vertauschung der Elemente $(r-2)$-ter Ordnung besitzt nur dann ein Fundamentalpaar infinitesimaler Transformationen, wenn sie mit der Gruppe (9) *projektiv ist.*

Damit ist die Frage der Fundamentalpaare infinitesimaler Transfor mationen für die ebenen Transformationsgruppen vollständig erledigt.

§ 3.

Direkte Aufstellung der Identitätsformel.

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Ziel dieser Arbeit zu, de *independenten Darstellung* der Identitätsformel, um einen altmodische Ausdruck zu brauchen. Die Independenz besteht hier darin, daß man di Relativkoordinaten selbst garnicht zu berechnen braucht, sondern di Identitätsformel direkt aufstellen kann.

Die infinitesimale Transformation $\mathfrak{A}f + J\mathfrak{B}f$ ist, wie wir wisse mit $T_{e_0}^{e}\, T_{e+de}^{e_0}$ identisch, ds spielt hierbei die Rolle des Lieschen δ Läßt man nun e mit e_0 zusammenfallen, so reduziert sich diese infi tesimale Transformation auf $T_{e_0+de_0}^{e_0}$. Gleichzeitig geht $\mathfrak{A}f + J\mathfrak{B}f$ $\mathfrak{A}f + J_0\mathfrak{B}f$ über, weil $\mathfrak{A}f$ und $\mathfrak{B}f$ mit e und $e+de$ garnichts zu tu haben. Man hat also[6])

$$\mathfrak{A}f + J_0\mathfrak{B}f \equiv T_{e_0+de_0}^{e_0}.$$

$\mathfrak{A}f + J_0\mathfrak{B}f$ ist also die Umkehrung derjenigen Transformation aus G die e_0 in $e_0 + de_0$ überführt und $-\mathfrak{A}f - J_0\mathfrak{B}f$ diese Transformatio selbst. Hierdurch wird ein direkter Zugang zu $\mathfrak{A}f$ und $\mathfrak{B}f$ geöffnet.

Wenn wir die $(r-2)$-te Erweiterung von $U_\varrho f$ in der Form

$$\xi_\varrho p + \eta_\varrho q + \eta_{\varrho 1} q_1 + \cdots + \eta_{\varrho, r-2} q_{r-2}$$

schreiben, so führt die Forderung, daß $\Sigma l_\varrho U_\varrho f$ die Überführung von in $e_0 + de_0$ leisten soll, zu folgenden Gleichungen:

$$(10)\qquad \begin{cases} \Sigma l_\varrho \xi_\varrho^0 = \dfrac{dx_0}{ds_0} = \omega_0^{-1}, \\ \Sigma l_\varrho \eta_\varrho^0 = \dfrac{dy_0}{ds_0} = y_1^0 \omega_0^{-1}, \\ \Sigma l_\varrho \eta_{\varrho 1}^0 = \dfrac{dy_1^0}{ds_0} = y_2^0 \omega_0^{-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma l_\varrho \eta_{\varrho, r-2}^0 = \dfrac{dy_{r-2}^0}{ds_0} = y_{r-1}^0 \omega_0^{-1}. \end{cases}$$

Außerdem ist

$$(11)\qquad \Sigma l_\varrho U_\varrho f = -\mathfrak{A}f - J_0\mathfrak{B}f.$$

Da nach unserer Definition des Bogenelements und der Hauptdifferentia invariante $\omega_0 = 1$ und $J_0 = y_{r-1}^0$ ist, so können wir in den Gleichungen (1

[6]) e_0 und $e_0 + de_0$ gehören, ebenso wie e und $e+de$, einer Kurve an.

rall ω_0^{-1} durch 1 und y_{r-1}^0 durch J_0 ersetzen. Eliminiert man nun-
hr aus (10) und (11) die Größen l_ϱ, so ergibt sich für $\mathfrak{A}f + J_0\mathfrak{B}f$ ein
terminantenquotient. Im Nenner steht die Liesche Determinante

$$\Delta(e) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_\varrho & \eta_\varrho & \eta_{\varrho 1} & \cdots & \eta_{\varrho, r-2} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

ildet für das Anfangselement e_0.

Die Identitätsformel läßt sich jetzt in folgender Weise schreiben:

*) $$\frac{df(x,y)}{ds} = \Delta_0^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{U}_1 f & \cdots & \mathfrak{U}_r f \\ 1 & \xi_1^0 & \cdots & \xi_r^0 \\ y_1^0 & \eta_1^0 & \cdots & \eta_r^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{r-2}^0 & \eta_{1,r-3}^0 & \cdots & \eta_{r,r-3}^0 \\ J & \eta_{1,r-2}^0 & \cdots & \eta_{r,r-2}^0 \end{vmatrix}.$$

ist eine Abkürzung für $\Delta(e_0)$, wie überhaupt die Anfügung des Index 0
i Übergang zum Anfangselement bedeutet.

Hiermit ist eine independente Darstellung der Identitätsformel ge-
nnen. Man kann sie bei jeder Gruppe, deren infinitesimale Transforma-
nen vorliegen, hinschreiben, ohne die Relativkoordinaten vorher berechnen
müssen.

(Eingegangen am 27. Oktober 1924.)

Über eine paradoxe Eigenschaft gewisser bedingt konvergenter unendlicher Reihen.

Von

Konrad Knopp in Königsberg.

I.

Ist eine unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

absolut konvergent, so ist bekanntlich auch jede Teilreihe derselben, ins besondere für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \tag{2}$$

konvergent; und wenn wir die Summe der letzteren mit σ_k bezeichne so strebt mit wachsendem k

$$\sigma_k \to 0, \tag{3}$$

da ja $|\sigma_k| \leqq |a_k| + |a_{k+1}| + \ldots$, also höchstens gleich dem k-ten Re der nach Voraussetzung konvergenten Reihe $\Sigma |a_n|$ ist. Es liegt nahe z prüfen, ob und inwieweit diese Tatsachen bestehen bleiben, wenn (1) n *bedingt* konvergiert.

Es ist an und für sich nicht überraschend, daß die Dinge hier ve schieden liegen. Indessen sind sie *so wesentlich* anders geartet, daß ih besondere Feststellung Interesse beanspruchen darf.

1. Ich beginne mit dem Nachweis der *besonders paradoxen* Tatsach *daß es konvergente Reihen* Σa_n *gibt, für die zwar jede der Reihen* (*konvergiert, für die auch* $\lim \sigma_k$ *existiert, für die aber dieser Grenzwe nicht* $= 0$, *sondern etwa* $= 1$ *ist*[1]).

[1]) Die Frage nach der Existenz solcher Reihen wurde gelegentlich einer Unte suchung über Fourierreihen von Herrn W. Rogosinski aufgeworfen.

Eine Reihe (1) mit dieser Eigenschaft kann man folgendermaßen ilden: Für

$$\text{4)}\quad \begin{cases} n = 1;\ 4,\ 5,\ 6,\ 7;\ 66,\ 74,\ 78,\ 82,\ 102,\ 106 \\ \text{sei} \\ a_n = 1;\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2};\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

nd für die übrigen $n < 106$ sei $a_n = 0$. Allgemein sollen die Glieder er Reihe, von vielen zwischengeschalteten Nullen abgesehen, Gruppen er Form

$$\text{5)}\qquad +\frac{1}{m},\ -\frac{1}{m},\ +\frac{1}{m},\ -\frac{1}{m},\ \ldots,\ +\frac{1}{m},\ -\frac{1}{m}$$

it $2m$ von 0 verschiedenen Gliedern bilden, die abwechselnd gleich $+\frac{1}{m}$ und $-\frac{1}{m}$ sind. Die Nenner m in diesen Gruppen sollen dabei onoton ins Unendliche wachsen, so daß die Konvergenz von Σa_n von rnherein gesichert ist und die Summe gleich 1 sein wird. Die hinschriebenen Glieder entsprechen, von a_1 abgesehen, den Werten $m = 2$ nd $m = 3$. Ferner sind die Nummern der Glieder $-\frac{1}{2}$, die halben ummern der Glieder $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$, sowie der sechste Teil der Nummern r Glieder $+\frac{1}{3}$ lauter verschiedene Primzahlen.

Allgemein lege ich nun die zu verwendenden Nenner m und die Inzes n, welche den von 0 verschiedenen Gliedern gegeben werden sollen, lgendermaßen fest:

Es sei v_h das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, h$. ann soll m diejenigen natürlichen Zahlen $\geqq 2$ durchlaufen, für die $n > v_{m-1}$ (und folglich $v_{m-1} \mid v_m$) ist, d. h. die Zahlen

$$\text{6)}\qquad m = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ \ldots\ .$$

Es seien nun schon bis zu einer bestimmten von diesen Zahlen, etwa is m_0, die Gruppen (5) hingeschrieben und ihren Gliedern bestimmte wachsende) Nummern n gegeben, deren höchste n_0 sei, — wie dies nter (4) für $m_0 = 3$ und $n_0 = 106$ geschehen. Es sei überdies die ummer n' eines Gliedes $+\frac{1}{m'}$ stets durch $v_{m'}$, die Nummer n'' eines liedes $-\frac{1}{m''}$ stets durch $v_{m''-1}$ teilbar, und die Quotienten seien dabei *uter verschiedene* Primzahlen p' bzw. p'', wie dies bei (4) für die lieder $\pm\frac{1}{2}$ und $\pm\frac{1}{3}$ der Fall ist, denen die Primzahlen $p' = 2, 3, 11, 13, 17$ nd $p'' = 5, 7, 37, 41, 53$ entsprechen. Endlich sei jedes p'' größer s das entsprechende $v_{m''}$. Die hierbei bis n_0 benutzten Nummern n wie die bis dahin aufgetretenen Primzahlen p und p'' mögen als „verraucht" gelten.

Es sei dann m die auf m_0 folgende Zahl der Folge (6), und r so gewählt, daß $v_m^r > n_0$ ist. Dann wähle man $2m$ natürliche Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_m$, so daß

1. $\quad x_\lambda v_m < y_\lambda v_{m-1}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ und

$$y_\lambda v_{m-1} < x_{\lambda+1} v_m \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, m-1$$

ist, und daß

2. die $2m$ Zahlen

$$v_m^{r-1} + x_\lambda \quad \text{und} \quad \frac{v_m}{v_{m-1}} v_m^{r-1} + y_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

lauter Primzahlen sind, die voneinander und von den bisher verbrauchten Primzahlen verschieden sind, sowie oberhalb v_m liegen.

Dann geben wir

den m Gliedern $+\frac{1}{m}$ die Nummern $n = v_m^r + x_\lambda v_m$,

„ m „ $-\frac{1}{m}$ „ „ $n = v_m^r + y_\lambda v_{m-1}$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

und setzen für die übrigen n, soweit $n_0 < n < v_m^r + y_m v_{m-1}$ ist, stets $a_n = 0$.

Die so gebildete Reihe (1) *leistet das Verlangte.* Denn sie ist, wie schon betont, sicher konvergent (und ihre Summe $= 1$). Ist dann $k \geqq 2$ beliebig gegeben, so sei $m = m(k)$ die kleinste Zahl der Folge (6), für die $k \mid v_m$. Zur Summe der Reihe (2) trägt dann die diesem m entsprechende Gruppe offenbar m-mal $+\frac{1}{m}$, also $+1$, bei. Die Glieder aller folgenden Gruppen haben Nummern, die *sämtlich* durch k teilbar sind. Die Reihe (2) ist also jedenfalls konvergent und ihre Summe σ_k ist $= +1$, vermehrt um die Summe derjenigen Glieder a_n, die den eben genannten m-Gruppe vorangehen. Unter diesen ist aber *höchstens ein* von 0 verschiedenes Glied. Denn deren Nummern haben die Form $v_h \cdot p$, bei der $h < m$ ist und p eine Primzahl bedeutet. Es kann aber k nicht Teiler zweier verschiedener solcher Nummern sein. Denn wäre

$$\text{neben} \quad k \mid v_h \cdot p \quad \text{zugleich noch} \quad k \mid v_{h'} \cdot p',$$

so müßte, wenn wir $h' \leqq h$ annehmen und den größten gemeinsamen Teiler $(v_h, k) = d$ und $k : d = k'$ setzen, auch neben $k' \mid p$ noch $k' \mid p'$ sein. Das ist aber unmöglich, weil $k' > 1$ und p und p' *verschiedene* Primzahlen sind. Es ist also

$$\text{entweder} \quad \sigma_k = 1 \quad \text{oder} \quad \sigma_k = 1 + \varepsilon_k,$$

nn mit ε_k ein bestimmtes von 0 verschiedenes Reihenglied bezeichnet d, dessen Nummer $\geqq k$ ist. Wegen $a_n \to 0$ strebt also auch $\varepsilon_k \to 0$ l daher, wie behauptet, $\sigma_k \to 1$.

2. Addiert man zu der eben konstruierten Reihe gliedweise irgendeine olut konvergente Reihe, so erhält man offenbar wieder eine Reihe (1), die $\sigma_k \to 1$ strebt.

3. Multipliziert man irgendeine dieser Reihen gliedweise mit der Konnten α, so erhält man eine Reihe (1), für die $\sigma_k \to \alpha$, also gegen einen iebig wählbaren (auch komplexen) Wert strebt.

4. Eine leichte Modifikation liefert uns nun auch (reelle) *konvergente* *hen* (1), *für die wieder alle* σ_k *existieren, für die nun aber* $\sigma_k \to +\infty$ *bt.* Dazu braucht man nur den Gruppen (5) nicht wie bisher $2m$, dern etwa $2m^2$ Glieder zu geben und alle übrigen Vorschriften sinnäß anzupassen. Dann ist offenbar $\sigma_k = m$ oder $= m + \varepsilon_k$ und es strebt, m zugleich mit k ins Unendliche wächst, nun $\sigma_k \to +\infty$.

Kehrt man alle Zeichen um, so erhält man eine Reihe (1), für die $\to -\infty$ strebt.

5. Ebenso leicht lassen sich nun (reelle) Reihen bilden, für die $\lim \sigma_k$ rhaupt nicht existiert[2]), sondern etwa — um gleich ein sehr allgemeines halten anzugeben — die Häufungsgrenzen

$$\underline{\lim}\, \sigma_k = \varkappa \quad \text{und} \quad \overline{\lim}\, \sigma_k = \mu$$

---

[2]) Herr G. Szegö, dem ich den Inhalt dieser Note mitteilte, gab mir (8. 12. 24) in gewisser Hinsicht natürlicheres Beispiel einer Reihe Σa_n an, bei der alle σ_k tieren, aber $\lim \sigma_k$ nicht vorhanden ist. Dies leistet nämlich für geeignetes x n die Reihe $\sum \frac{\cos 2\pi n x}{n}$, bei der für jedes irrationale x alle σ_k existieren und Werte

$$\sigma_k = -\frac{1}{k} \log |2 \sin k\pi x|$$

en. Wird nun x in $0 \ldots 1$ so gewählt, daß bei seiner dyadischen Entwicklung

$$x = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \ldots \qquad (z_\nu = 0 \text{ oder } 1),$$

unendlich viele ν

$$z_\nu = 1, \quad z_{\nu+1} = z_{\nu+2} = \ldots = z_{\nu+2^\nu} = 0$$

so ist für diese ν, wenn $2^\nu = m$ gesetzt wird,

$$|\sin m\pi x| < \frac{\pi}{2^m},$$

$$\sigma_m > \frac{1}{m} \log \frac{2^m}{2\pi} = \log 2 - \frac{\log 2\pi}{m},$$

daß $\overline{\lim}\, \sigma_k \geqq \log 2$ ist. Und da hier offenbar $\underline{\lim}\, \sigma_k = 0$ ist, so ist $\lim \sigma_k$ sicher t vorhanden.

beliebig vorgegebene Werte $\varkappa$ und $\mu\,(>\varkappa)$ haben. Dazu hat man nur de Gruppen (5) eine mit m wechselnde Gliederanzahl zu geben, etwa in fol gender Art: Jedem *geraden* m der Folge (6) ordnen wir eine natürlich Zahl g_m so zu, daß, wenn m nur diese geraden Zahlen aus (6) durchläuft

$$\frac{g_m}{m} \to |\mu|$$

strebt. Den diesen geraden m entsprechenden Gruppen (5) geben wir dan $2g_m$ Glieder, und zwar in der bisherigen Reihenfolge $+\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \ldots$, fall $\mu \geqq 0$ ist, in der entgegengesetzten Reihenfolge $-\frac{1}{m}, +\frac{1}{m}, \ldots$, fal $\mu < 0$ ist. Ebenso ordnen wir den *ungeraden* m der Folge (6) je ein natürliche Zahl u_m so zu, daß in entsprechendem Sinne

$$\frac{u_m}{m} \to |\varkappa|$$

strebt, und geben den diesen ungeraden m entsprechenden Gruppen (5 je $2u_m$ Glieder $\pm\frac{1}{m}$, und zwar wieder in der ersten oder zweiten Reihen folge, je nachdem $\varkappa \geqq 0$ oder < 0 ist.

Man übersieht sofort, daß nun wirklich die Beziehungen (7) erfüll sind; $\varkappa$ und μ dürfen dabei auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein.

6. Ordnet man noch allgemeiner den m der Folge (6) ganze Zahle $h_m \leqq 0$ so zu, daß die Quotienten

$$\frac{h_m}{m}$$

sich in den Punkten einer gegebenen abgeschlossenen Punktmenge M un nur in diesen häufen (was offenbar möglich), und gibt den Gruppen (5 je $2|h_m|$ Glieder $\pm\frac{1}{m}$, und zwar wieder in der Reihenfolge $+\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \ldots$ oder der entgegengesetzten, je nachdem $h_m > 0$ oder < 0 ist, so sind d Reihen (1) und (2) offenbar wieder alle konvergent, *aber die* σ_k *bild nun eine Punktmenge mit vorgeschriebener Ableitung.*

7. Multipliziert man endlich noch in geeigneter Weise die Glied der den einzelnen m entsprechenden Gruppen mit passenden komplexe Zahlen α_m vom absoluten Betrage 1, so kann man schließlich Reihen Σ mit komplexen Gliedern bilden, *bei denen wieder sämtliche* σ_k *existier und eine ebene Punktmenge bilden, deren Ableitung eine in der Ebe willkürlich vorgeschriebene abgeschlossene Punktmenge bildet.*

II.

Wir haben bisher nur Reihen Σa_n betrachtet, bei denen *sämtlic* Teilreihen Σa_{k_n} konvergieren. Wir wollen zum Schluß noch an Beispiel

en, daß bezüglich der Konvergenz und Divergenz der Reihen (2) die schiedensten Möglichkeiten auftreten können.

8. Zunächst ist es fast trivial, daß unter den Reihen (2) unendlich e konvergieren, unendlich viele andere divergieren können. So ist für Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

Reihe (2) offenbar für jedes ungerade k konvergent, für jedes gerade k ergent.

9. Nicht ganz so einfach zu sehen ist es, daß es auch Reihen (1) t, bei denen die Reihen (2) für *endlich viele* k divergieren, für alle lern k konvergieren. Ich werde sogar zeigen, *daß man eine Reihe* Σa_n *den kann, bei der die Reihe* (2) *für endlich viele vorgeschriebene* k, *a für* $k = k_1, k_2, \dots, k_r$, *divergiert, für alle andern* $k \geqq 1$ *dagegen vergiert.* Unter den vorgeschriebenen Zahlen $k_1, \dots, k_r$, die wir natürl als paarweis verschieden voraussetzen, darf dabei auch $k = 1$ vorkommen.

Es seien also $k_1, k_2, \dots, k_r$ bestimmt gegebene, paarweis verschiedene ürliche Zahlen. Es seien $d_1, d_2, \dots, d_s$ diejenigen (paarweis verschiedenen) ler dieser Zahlen k_ϱ, die von den k_ϱ selbst verschieden sind. Die $+ s = t$ Zahlen k_ϱ und d_σ wollen wir der Größe nach (steigend) geordnet t $h_1 = 1, h_2, h_3, \dots, h_t$ bezeichnen. Dann wähle man für $m = 1, 2, 3, \dots$ t Primzahlen $p_1^{(m)}, \dots, p_t^{(m)}$, die sämtlich untereinander verschieden, ntlich $> h_t$ sind und mit denen für $m = 1, 2, 3, \dots$

$$h_1 p_1^{(m)} < h_2 p_2^{(m)} < \dots < h_t p_t^{(m)},$$

vie $h_t p_t^{(m)} < h_1 p_1^{(m+1)}$ ist. Den Gliedern a_n, deren Index n *keines* der odukte (8) ist, gebe ich nun den Wert 0; den Gliedern a_n aber, deren dex für ein bestimmtes m in (8) auftritt, gebe ich nach folgender Vorrift einen Wert der Form $\frac{m'}{m}$:

Für $n = h_t p_t^{(m)}$ setze ich $a_n = \frac{1}{m}$. Es sei dann schon für $= h_t p_t^{(m)}, h_{t-1} p_{t-1}^{(m)}, \dots, h_{\tau+1} p_{\tau+1}^{(m)}$ der Wert von a_n in der Form $\frac{m'}{m}$ $' \gtrless 0$) festgelegt ($1 \leqq \tau < t$). Ich betrachte dann, um a_n für $n = h_\tau p_\tau^{(m)}$ zugeben, diejenigen der Zahlen $h_t, h_{t-1}, \dots, h_{\tau+1}$, von denen h_τ ein iler ist. Es sei α_τ die Summe der Zähler der den entsprechenden a_n geordneten Brüche $\frac{m'}{m}$ (oder also: die m-fache Summe dieser Brüche). r $n = h_\tau p_\tau^{(m)}$ setze ich dann $a_n = \frac{-\alpha_\tau}{m}$ oder aber $= \frac{-\alpha_\tau + 1}{m}$, je nachdem eine der Zahlen d_σ oder eine der Zahlen k_ϱ ist.

Führt man dies für $\tau = t-1, t-2, \ldots, 2, 1$ und das Ganze für $m = 1, 2, 3, \ldots$ aus, so erhält man eine wohlbestimmte Reihe Σa_n, die das Verlangte leistet. Denn ist k beliebig gegeben und gleich einer der Zahlen k_ϱ, so liefert jedes der für ein bestimmtes m hergestellten Stücke der Reihe Σa_n zur Reihe Σa_{kn} genau den Beitrag $\frac{1}{m}$. Die Reihe (2) ist dann also divergent. Ist dagegen k gleich einer der Zahlen d_σ, so ist in jedem Stück die Summe der Glieder a_n, deren Index durch dies d_σ teilbar ist, konstruktionsgemäß $= 0$. Daher ist die Reihe Σa_{kn} jetzt konvergent, denn die m-fache Summe der Beträge der Glieder des m-ten Stückes hat einen von m unabhängigen Wert; mit wachsendem m strebt also die Summe der Beträge der Glieder des m-ten Stückes gegen 0. Ist endlich k von den k_ϱ und den d_σ (also von allen h_τ) verschieden, so hat Σa_{kn} offenbar *höchstens ein* von 0 verschiedenes Glied und ist also sicher konvergent.

10. Noch weniger naheliegend ist es, daß man umgekehrt auch Reihen Σa_n bilden kann, *deren Teilreihen* (2) *nur für endlich viele vorgeschriebene k-Werte, etwa für* $k = k_1, k_2, \ldots, k_r$ *konvergieren, für alle anderen k dagegen divergieren.*

a) Ich gebe zunächst ein *Beispiel einer Reihe* Σa_n, *die selber konvergiert, während die Reihen* (2) *für jedes* $k \geqq 2$ *divergieren.* Es genügt hierzu, die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ dadurch zu verändern, daß man jedes Glied $\frac{1}{p}$ ($p =$ Primzahl) durch die negative Summe derjenigen unmittelbar vorangehenden Glieder $\frac{1}{n}$, für die n keine Primzahl ist, ersetzt. So entsteht die Reihe

$$1 - \overset{2}{1} + \overset{3}{0} + \frac{1}{4} - \overset{5}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{6} - \overset{7}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{8} + \overset{11}{\frac{1}{9}} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12} - \overset{13}{\frac{1}{12}} + \cdots$$

Diese Reihe ist offenbar konvergent mit der Summe 0, denn die eingeschalteten negativen Glieder, die jedesmal die positiven kompensieren, streben ihrerseits gegen 0; der Betrag des $(\nu+1)$-ten dieser Glieder ist nämlich, wenn p_ν die ν-te Primzahl bedeutet,

$$< \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

und dieser Wert strebt $\to 0$.

Für $k \geqq 2$ aber ist die Reihe Σa_{kn} von einer Stelle an mit $\sum \frac{1}{k}$ identisch, also divergent.

b) Ganz leicht ist es nun, *eine Reihe* Σa_n *anzugeben, für die* Σa_{kn} *für ein gegebenes* $k = k_0 \geqq 2$ *konvergiert, für alle übrigen* $k \geqq 1$ *divergiert*

Hier ersetzen wir die Glieder der harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{n}$, für die n der Reihe nach durch die mit $\frac{1}{k_0}$ multiplizierten Glieder der eben ter a) konstruierten Reihe. Die so entstandene Reihe Σa_n unter- eidet sich von $\sum \frac{1}{n}$ nur dadurch, daß alle Glieder, deren Nenner die rm $k_0 \cdot p$ hat ($p =$ Primzahl), durch gewisse Werte $\leqq 0$ ersetzt sind. ist klar, daß nun die Reihe (2) für $k = k_0$ konvergiert. Für ein k er, welches $\neq k_0$ ist, muß die Reihe (2) wieder divergieren. Denn nn zufällig $k \mid k_0$, so setzt sich Σa_{kn} aus der konvergenten Reihe $\Sigma a_{k_0 n}$ d einer divergenten Teilreihe von $\sum \frac{1}{n}$ zusammen. Ist aber k kein Teiler n k_0, also $\frac{k}{(k, k_0)} = k' > 1$, so ist $kn = k_0 p$ ($p =$ Primzahl, $n \geqq 1$ be- ig) für *höchstens ein* n bzw. p erfüllt, da ja $k' \mid p$, also $k' = p$ sein ßte. Σa_{kn} ist also von einer Stelle an wieder mit $\sum \frac{1}{kn}$ identisch, o divergent.

c) Will man in ähnlicher Weise ein Beispiel der zu Beginn dieser mmer angegebenen allgemeineren Art bilden, so werden die Dinge un- ersichtlich. Wir gehen daher anders vor.

Es seien also $k_1, k_2, \ldots, k_r$ bestimmt gegebene (paarweis verschiedene) türliche Zahlen, unter denen k_r die größte sei. Dann führe man für $= k_r + 2, k_r + 3, \ldots$ folgenden Konstruktionsprozeß durch: Den Zahlen $= 1, 2, \ldots, m$ ordne man gewisse ganze Zahlen $g_\lambda^{(m)} \gtreqless 0$ zu. Und zwar ze man $g_m^{(m)} = 1$, $g_{m-1}^{(m)} = 1$; und wenn die $g_\mu^{(m)}$ schon für $\mu = m, -1, \ldots, \lambda + 1$ festgelegt sind ($1 \leqq \lambda < m$), so sei $\alpha_\lambda^{(m)}$ die Summe jenigen dieser Zahlen, für die λ ein Teiler von μ ist. Dann soll

$$g_\lambda^{(m)} = \begin{cases} -\alpha_\lambda^{(m)}, & \text{falls } \lambda \text{ eine der Zahlen } k_1, \ldots, k_r \text{ ist,} \\ -\alpha_\lambda^{(m)} + 1, & \text{falls } \lambda \text{ nicht zu den Zahlen } k_1, \ldots, k_r \text{ gehört.} \end{cases}$$

ist dann offenbar für jedes $m > k_r$

$$\sum_{k \mid \lambda} g_\lambda^{(m)} = 0 \text{ oder } 1,$$

achdem k zu den Zahlen $k_1, \ldots, k_r$ gehört oder nicht. Es sei endlich die Summe der Beträge der $g_\lambda^{(m)}$:

$$\beta_m = \sum_{\lambda=1}^{m} |g_\lambda^{(m)}|.$$

Dann bestimmen wir $m\beta_m$ Primzahlen $p_\nu^{(m)}$, $\nu = 1, \ldots, m\beta_m$, die er sich und von den bei den etwaigen kleineren Werten von m be-

nutzten Primzahlen verschieden sein sollen, die sämtlich $> k_r$ sind und so beschaffen, daß

$$(10) \quad p_1^{(m)} < 2p_2^{(m)} < \ldots < mp_m^{(m)} < p_{m+1}^{(m)} < 2p_{m+1}^{(m)} < \ldots < mp_{m\beta_m}^{(m)}$$

ist. (Als Koeffizienten der p tritt hier also β_m-mal die Gruppe der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ auf.) Überdies soll $mp_{m\beta_m}^{(m)} < p_1^{(m+1)}$ sein, so daß, wenn die Produkte (10) für $m = k_r+2, k_r+3, \ldots$ aneinander gefügt werden, eine wachsende Folge natürlicher Zahlen entsteht. Dann setzen wir

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ wenn } n \text{ keines der Produkte (10) ist,} \\ \dfrac{g_\lambda^{(m)}}{m\beta_m}, \text{ für } n = \lambda p_{\varkappa m+\lambda}^{(m)}, \ \varkappa = 0, 1, \ldots, \beta_m - 1; \ \lambda = 1, 2, \ldots, m; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m = k_r+2, k_r+3, \ldots. \end{cases}$$

Die so entstehende Reihe leistet das Verlangte. Denn ist $k \geqq 1$ beliebig gegeben und zunächst von den vorgeschriebenen Werten $k_1, \ldots, k_r$ verschieden, so liefert für jedes m von einer Stelle an (nämlich sobald alle Primzahlen $p_\nu^{(m)} > k$ sind) die Indexgruppe (10) gemäß (9) den Beitrag $\beta_m \cdot \dfrac{1}{m\beta_m} = \dfrac{1}{m}$ zur Reihe Σa_{kn}; diese muß also divergieren. Ist dagegen das gegebene k einer der Werte $k_1, \ldots, k_r$, so liefert für jedes m jede der β_m Indexgruppen, die in (10) den Koeffizienten $1, 2, \ldots, m$ entsprechen, den Beitrag 0 zur Reihe Σa_{kn}. Und da die Summe der Beiträge der Glieder einer solchen Gruppe

$$= \frac{\beta_m}{m\beta_m} = \frac{1}{m}$$

ist und also mit wachsendem m gegen 0 strebt, so ist Σa_{kn} konvergent (und zwar zur Summe 0). Also ist Σa_n in der Tat eine Reihe mit den zu Beginn dieser Nummer angegebenen Eigenschaften.

Königsberg i. Pr., Mathematisches Seminar, 12. 11. 24.

(Eingegangen am 18. November 1924.)

Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen.

Von

Stefan Kaczmarz in Lwów.

In den letzten Jahren sind einige allgemeine Sätze über die onvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen entdeckt worden. Rademacher[1]) und D. Menchoff[2]) haben die Konvergenz der Orthonalreihe $\sum_1^\infty c_n \varphi_n(x)$ fast überall, unter Voraussetzung, daß die Reihe $c_n^2 \lg^2 n$ konvergent, bewiesen. Desgleichen aus der Konvergenz der eihe $\sum_1^\infty c_n^{2-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ folgt die fast ausnahmslose Konvergenz von $c_n \varphi_n(x)$.[3]) Dagegen ist — wie Menchoff[2]) gezeigt hat — etwa die oraussetzung „$\sum_1^\infty c_n^2 \lg^{2-\varepsilon} n$ konvergent" nicht mehr ausreichend.

Im folgenden beweise ich zwei analoge Sätze über die Konvergenz, nn den Satz, daß die Entwicklung einer quadratisch integrierbaren unktion nach einem Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ entweder fast überall $(C1)$ mmierbar, d. h. im Sinne der ersten arithmetischen Mittel konvergent, er nicht einmal mit der Poissonschen Methode fast überall summierr ist; zuletzt beweise ich, daß die Reihe $\sum_1^\infty c_n \varphi_n(x)$ fast überall $(C1)$

[1]) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalnktionen. Math. Annalen 87 (1922), S. 117–120.

[2]) D. Menchoff, Sur les séries des fonctions orthogonales. Fund. Math. 4 923), S. 83–88.

[3]) D. Menchoff, Comptes Rendus 178 (1924), S. 301.

summierbar ist, wenn $\sum_1^\infty c_n^2 \sqrt{\lg n}$ konvergiert. Damit wird das Resultat von H. Weyl[4]), der die Konvergenz von $\sum_1^\infty c_n^2 \lg n$ voraussetzt, verschärft.

Betrachten wir ein System $\{\varphi_n(x)\}$ von Orthogonalfunktionen, welches im Intervall $[a, b]$ definiert und normiert ist. Es sei für eine integrierbare Funktion $\bar{f}(x)$

$$c_n = \int_a^b \bar{f}(t)\varphi_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dann gilt der folgende

Satz I. *Unter der Voraussetzung*

1. $\bar{f}(x) \varepsilon L^2$, $\varphi_n(x) \varepsilon L^2$,

d. h. $\bar{f}(x)$, $\varphi_n(x)$ *sind quadratisch integrierbar im Intervall* $[a, b]$,

2. $\sum_1^\infty |c_{n+1}| \sqrt{r_n}$ *konvergiert, wo* $r_n = c_{n+1}^2 + c_{n+2}^2 + \ldots$,

konvergiert die Entwicklung

$$\sum_1^\infty c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

fast überall im Intervall $[a, b]$.

Beweis. Wir schreiben

$$s_p(x) = \sum_1^p c_n \varphi_n(x)$$

und bilden die Reihe

$$\sum_1^\infty a_n, \tag{2}$$

wo

$$a_n = \int_a^b |[f(t) - s_{n+1}(t)]^2 - [f(t) - s_n(t)]^2|\,dt$$

bezeichnet und $f(t)$ diejenige Funktion ist, für welche

$$\int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2\,dt \to 0$$

gilt.

Die Reihe (2) ist konvergent. Wir haben nämlich

$$0 \leqq a_n \leqq 2\int_a^b |c_{n+1}\varphi_{n+1}(t)[s_n(t) - f(t)]|\,dt + c_{n+1}^2;$$

---

[4]) H. Weyl, Über die Konvergenz der Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten. Math. Annalen 67 (1909), S. 241–243.

s der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\int |c_{n+1}\varphi_{n+1}(t)[s_n(t)-f(t)]|\,dt \leqq \sqrt{c_{n+1}^2 \int_a^b [f(t)-s_n(t)]^2\,dt} = |c_{n+1}|\sqrt{r_n},$$

so konvergiert die Reihe (2) nach der Voraussetzung 2).

Daraus schließen wir[5]), daß die Reihe

$$\sum_1^\infty |[f(t)-s_{n+1}(t)]^2 - [f(t)-s_n(t)]^2|$$

so um so mehr die Reihe

$$\sum_1^\infty \{[f(t)-s_{n+1}(t)]^2 - [f(t)-s_n(t)]^2\},$$

d damit die Folge

$$f(t)-s_n(t) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

st überall im Intervall $[a, b]$ gegen Null konvergiert.

Satz II. *Unter der Voraussetzung*

1. $\bar{f}(x) \varepsilon L^2$,
2. $|\varphi_n(x)| < A$ *für alle* n *und* x,
3. $\sum_1^\infty |c_n| r_n$ *konvergiert,*

nvergiert die Reihe (1) *fast überall.*

Beweis. Indem wir die Variable t nicht mehr immer mitschreiben, ben wir

$$(f-s_{n+1})^3 - (f-s_n)^3 = -c_{n+1}\varphi_{n+1}[(f-s_{n+1})^2 + (f-s_{n+1})(f-s_n) + (f-s_n)^2],$$

e linke Seite ist daher integrierbar und

$$|(f-s_{n+1})^3 - (f-s_n)^3| \leqq |c_{n+1}| A\{(f-s_{n+1})^2 + |f-s_{n+1}||f-s_n| + (f-s_n)^2\}.$$

Durch Integration der letzten Ungleichung erhält man mittels der ngleichung

$$\int |f-s_{n+1}||f-s_n|\,dt \leqq \sqrt{\int (f-s_{n+1})^2\,dt \cdot \int (f-s_n)^2\,dt} = \sqrt{r_n r_{n+1}} \leqq r_n,$$

ß

$$\int_a^b |(f-s_{n+1})^3 - (f-s_n)^3|\,dt \leqq |c_{n+1}| A(2r_n + r_{n+1}) = A[|c_{n+1}| r_{n+1} + 2|c_{n+1}| r_{n+1} + 2|c_{n+1}|^3].$$

e weitere Beweisführung ist dem Beweise des I. Satzes ganz analog.

[5]) B. Levi, Rend. Ist. Lomb. (2) 39 (1906), S. 775–780; vgl. auch A. Rajchman d S. Saks, Fund. Math. 4 (1923), S. 211–213.

Es ist leicht, ein Beispiel anzugeben, in welchem die Bedingung des I. Satzes, nicht aber die Bedingung von Rademacher-Menchoff erfüllt ist[6]). Es sei nämlich

$$c_n = \frac{1}{k} \text{ für } n = k^k, \text{ sonst } c_n = 0.$$

Dann ist

$$\sum_1^\infty c_n^2 = \sum_1^\infty \frac{1}{k^2}, \quad r_n < \frac{1}{k} \quad \text{für } k^k < n,$$

also

$$\sum_1^\infty |c_n| \sqrt{r_n} < \sum \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1}{k}} = \sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Andererseits

$$\sum_1^\infty c_n^2 \lg^2 n = \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} \lg^2 (k^k) = \sum_1^\infty \lg^2 k.$$

Die Bedingung „$\sum_1^\infty c_n^2 \lg^2 n$ divergent" ist hier aber nur formell nicht erfüllt; es genügt zu setzen $\psi_n(x) = \varphi_{n^n}(x)$, dann ist sie erfüllt.

Jetzt gehen wir zum Beweise des nächsten Satzes über.

Hilfssatz 1. *Wenn 1. die numerische Reihe* $\sum_1^\infty \alpha_n (C1)$ *summierbar und 2. die Reihe* $\sum_1^\infty n \alpha_n^2$ *konvergent ist, dann konvergiert die Reihe* $\sum_1^\infty \alpha_n$.[7])

Hilfssatz 2. *Bezeichnet* $A_n^{(r)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *die Folge der r-ten Cesàroschen Mittel* $(r = 1, 2, \ldots)$ *der Orthogonalreihe einer* $f(x) \varepsilon L^2$, *so konvergiert die Reihe*

$$\sum_1^\infty n (A_{n+1}^{(r)} - A_n^{(r)})^2$$

fast überall.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß

$$\sum_1^\infty n \int_a^b [A_{n+1}^{(r)} - A_n^{(r)}]^2 \, dt$$

konvergiert. Den Beweis führen wir nur für $r = 1$ aus, für $r > 1$ wird er in analoger Weise geführt.

$$A_{n+1}^{(1)} - A_n^{(1)} = \sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \varphi_k \left[1 - \frac{k-1}{n+1}\right] - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \left[1 - \frac{k-1}{n}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-1) c_k \varphi_k \frac{1}{n(n+1)} + c_{n+1} \varphi_{n+1} \frac{1}{n+1}.$$

---

[6]) Den Ansatz zu diesem Beispiel verdanke ich Prof. H. Steinhaus.

[7]) L. Fejér, Comptes Rendus **156** (1913), S. 46. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1924, II. Ausgabe, XIII. Kap. Aufg. 209

so

$$\int_a^b (\sigma_{n+1}-\sigma_n)^2\,dt = \frac{1}{(n+1)^2}\left[\sum_{k=1}^{n} c_k^2\frac{(k-1)^2}{n^2}+c_{n+1}^2\right]$$

$$n\int_a^b [\sigma_{n+1}-\sigma_n]^2\,dt < \sum_{k=1}^{n} c^2(k-1)^2\frac{1}{n^2(n+1)}+\frac{c_{n+1}^2}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{p} n\int_a^b (\sigma_{n+1}-\sigma_n)^2\,dt < \sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} c_k^2(k-1)^2\frac{1}{n^2(n+1)}+\sum_{n=1}^{p}\frac{c_{n+1}^2}{n+1}.$$

Die zweite Summe rechts konvergiert, es bleibt also die Konvergenz er ersten Summe zu zeigen.

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} c_k^2(k-1)^2\frac{1}{n^2(n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{p} c_k^2(k-1)^2\sum_{n=k}^{p}\frac{1}{n^2(n+1)} < \sum_{k=1}^{p} c_k^2(k-1)^2\frac{1}{k^2} < \sum_{1}^{\infty} c_k^2.$$

er Hilfssatz ist also bewiesen. Wir bemerken, daß beim letzten Schritt es Beweises nur die Konvergenz von $\sum_1^\infty c_k^2$ verwendet wurde. Daraus lgt der

Satz III. *Wenn die Entwicklung einer $\bar{f}(x)\,\varepsilon\,L^2$ im Intervall $[a, b]$ st überall (Cr) summierbar ist, wo r eine gewisse ganze Zahl, $= 1, 2, 3, \ldots$, bedeutet, dann ist sie auch fast überall $(C1)$ summierbar.*

Beweis. Es sei also die Reihe (1) fast überall (Cr) summierbar $\cdot \geqq 2$). Man setze $\alpha_n = A_{n+1}^{(r-1)} - A_n^{(r-1)}$. Dann ist nach der Voraussetzung $\sum_{+1}^{\infty} \alpha_n$ fast überall $(C1)$ summierbar und nach Hilfssatz 2 $\sum_1^\infty n\alpha_n^2$ fast berall konvergiert. Somit wird Hilfssatz 1 fast überall anwendbar und ie Entwicklung von $\bar{f}(x)$ erweist sich als fast überall $(C, r-1)$ sumierbar usw.

Es gilt sogar ein schärferer Satz. Nach dem Fejérschen Satz[8]) folgt us der Konvergenz von $\sum_1^\infty n a_n^2$ die Konvergenz der Reihe $\sum_1^\infty a_n$, wenn

[8]) E. Landau, Darstellung und Begründung einiger Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin: Julius Springer 1916, S. 59. Die Bemerkung, daß hier dieser Satz zu verwenden ist, verdanke ich Herrn A. Orlicz.

nur die Reihe nach der Poissonschen Methode summierbar ist, d. h. wenn bei geradliniger Annäherung

$$\lim_{0 \leqq x \to 1} \sum_1^\infty a_n x^n$$

existiert. Andererseits folgt aus der Poissonschen Summierbarkeit der Reihe $\sum_1^\infty a_n$ die der Folge $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots$, d. h. der Reihe $\sum_{n=1}^\infty (A_{n+1}^{(1)} - A_n^{(1)})$, wenn $A_n^{(1)}$ den zu $\sum a_n$ gehörigen $(C1)$ Mittelwert bezeichnet[9]). Wir haben also den

Satz IV. *Ist die Entwicklung einer $\bar{f}(x) \varepsilon L^2$ fast überall mit der Poissonschen Methode summierbar, so ist sie auch fast überall $(C1)$ summierbar.*

Satz V. *Unter der Voraussetzung:*

1. $\bar{f} \varepsilon L^2$, $\{\varphi_n(x)\}$ *normiert, orthogonal,*
2. $\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \sqrt{\lg n}$ *konvergiert,*

ist die Reihe (1) *fast überall* $(C1)$ *summierbar.*

Beweis. Es genügt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_1^\infty \int_a^b |(f-\sigma_n)^2 - (f-\sigma_{n+1})^2| \, dt \tag{3}$$

zu beweisen. Wir haben

$$(f-\sigma_n)^2 - (f-\sigma_{n+1})^2 = (\sigma_{n+1}-\sigma_n)(2f-\sigma_n-\sigma_{n+1}).$$

$$\int_a^b |(f-\sigma_n)^2 - (f-\sigma_{n+1})^2| \, dt \leqq \sqrt{\int_a^b (\sigma_{n+1}-\sigma_n)^2 \, dt \int_a^b [2f-\sigma_n-\sigma_{n+1}]^2 \, dt}$$

Das erste Integral rechts hat den Wert (vgl. Beweis des Hilfssatzes 2)

$$\int_a^b (\sigma_{n+1}-\sigma_n)^2 \, dt = \sum_{k=1}^n c_k^2 (k-1)^2 \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{c_{n+1}^2}{(n+1)^2}.$$

Das zweite Integral

$$\int_a^b (2f-\sigma_n-\sigma_{n+1})^2 \, dt = \sum_{k=1}^n c_k^2 (k-1)^2 \frac{(2n+1)^2}{n^2(n+1)^2} + c_{n+1}^2 \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$+ 4 r_{n+1} < 4 \sum_{k=1}^n c_k^2 (k-1)^2 \frac{1}{n^2} + 4 c_{n+1}^2 + 4 r_{n+1}$$

$$= 4 \left\{ \sum_{k=1}^n c_k^2 (k-1)^2 \frac{1}{n^2} + r_n \right\}.$$

---

[9]) K. Knopp, l. c. S. 500.

Zur Abkürzung bezeichnen wir

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 (k-1)^2 = B_n,$$

so

$$\int |(f-\sigma_n)^2 - (f-\sigma_{n+1})^2|\, dt \leqq 2\sqrt{\left(\frac{1}{n^2(n+1)^2} B_n + \frac{c_{n+1}^2}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} B_n + r_n\right)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{B_n^2}{n^4(n+1)^2} + \frac{c_{n+1}^2 B_n}{n^2(n+1)^2} + \frac{r_n B_n}{n^2(n+1)^2} + \frac{c_{n+1}^2 r_n}{(n+1)^2}}$$

$$< 2\left[\frac{B_n}{n^2(n+1)} + \frac{|c_{n+1}|}{n+1}\sqrt{\frac{B_n}{n^2}} + \sqrt{\frac{r_n B_n}{n^2(n+1)^2}} + \frac{|c_{n+1}|\sqrt{r_n}}{n+1}\right].$$

Über $\sum_1^\infty \frac{|c_n|}{n}$ konvergiert, $\frac{B_n}{n^2} < \sum_1^\infty c_k^2$, $r_n \to 0$, ebenso $\sum_1^\infty \frac{B_n}{n^2(n+1)^2}$ konvergiert, was beim Hilfssatz 2 am Schluß bewiesen wurde, es bleibt also für die Konvergenz von $\sum_1^\infty \sqrt{\frac{r_n B_n}{n^2(n+1)^2}}$ zu beweisen.

Nun ist

$$\sum_2^p \sqrt{\frac{r_n B_n}{n^2(n+1)^2}} \leqq \sum_2^p \sqrt{\frac{r_n}{n\sqrt{\lg n}} \cdot \frac{B_n \sqrt{\lg n}}{n^3}} \leqq \sqrt{\left(\sum_2^p \frac{r_n}{n\sqrt{\lg n}}\right)\left(\sum_2^p \frac{B_n \sqrt{\lg n}}{n^3}\right)}.$$

Die Reihen rechts sind konvergent, denn

$$\sum_2^p \frac{r_n}{n\sqrt{\lg n}} = \sum_2^p \frac{1}{n\sqrt{\lg n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 \leqq \sum_3^\infty c_k^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\lg 2}} + \ldots + \frac{1}{k\sqrt{\lg k}}\right),$$

ferner

$$\frac{1}{2\sqrt{\lg 2}} + \ldots + \frac{1}{k\sqrt{\lg k}} < \int_1^k \frac{dx}{x\sqrt{\lg x}} = 2\sqrt{\lg k}.$$

also $\sum_2^\infty \frac{r_n}{n\sqrt{\lg n}} < 2\sum_3^\infty c_k^2 \sqrt{\lg k}$ und die rechte Seite ist nach Voraussetzung 2 konvergent. Jetzt betrachten wir die zweite Reihe

$$\sum_2^p \frac{\sqrt{\lg n}}{n^3} B_n = \sum_{n=2}^p \frac{\sqrt{\lg n}}{n^3} \sum_{k=1}^n c_k^2 (k-1)^2 = \sum_{k=2}^p c_k^2 (k-1)^2 \sum_{n=k}^p \frac{\sqrt{\lg n}}{n^3};$$

ist

$$\sum_{n=k}^p \frac{\sqrt{\lg n}}{n^3} < \sum_{n=k}^\infty \frac{\sqrt{\lg n}}{n^3} < \frac{\sqrt{\lg (k-1)}}{2(k-1)^2} + \frac{1}{8(k-1)^2} \quad \text{für } k > 2,$$

also

$$\sum_2^\infty \frac{\sqrt{\lg n}}{n^2} B_n < \sum_2^\infty c_k^2 (k-1)^2 \left[\frac{\sqrt{\lg (k-1)}}{2(k-1)^2} + \frac{1}{8(k-1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_2^\infty c_k^2 \sqrt{\lg (k-1)} + \frac{1}{8} \sum_2^\infty c_k^2,$$

was die Konvergenz beweist.

Daraus folgt, daß die Folge $(f - \sigma_n)$ gegen Null konvergiert, da $\int_a^b (f-\sigma_n)^2 dt \to 0$, womit der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 13. Dezember 1924.)

Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I.

Von

H. Weyl in Zürich.

Kapitel I.

Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung.

§ 1.

Ziel der Untersuchung.

Im n-dimensionalen zentrierten affinen Raum $\mathfrak{r}$ wird — der Begriff „affin" so verstanden, wie er vor allem von Möbius benutzt wurde — der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern vermittelt durch eine *homogene lineare Transformation t in n Variablen von der Determinante* 1; die Gruppe aller dieser Transformationen werde mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Ein von der Wahl des Koordinatensystems abhängiges System von Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ heißt eine *lineare Größe* in jenem Raum, wenn die Komponenten a_i derselben in irgend zwei Koordinatensystemen, die durch die Transformation t auseinander hervorgehen, selber durch eine zu t gehörige homogene lineare Transformation T in N Variablen miteinander verbunden sind. Die gesetzmäßige Zuordnung $t \rightarrow T$ muß $\mathfrak{g}$ in eine zu $\mathfrak{g}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer Transformationen verwandeln. $\mathfrak{G}$ kennzeichnet die *Art* (oder *Klasse*) der betrachteten Größe. Darum können wir uns auch so ausdrücken: Es liege eine *Darstellung* der Gruppe $\mathfrak{g}$ vor, d. h. eine auf $\mathfrak{g}$ isomorph bezogene Gruppe $\mathfrak{G}$ homogener linearer Transformationen in N Variablen; oder es sei jedem Koordinatensystem im n-dimensionalen affinen Raum $\mathfrak{r}$ ein solches im N-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Die Größen von der Art $(\mathfrak{G})$ sind die *Vektoren* in diesem Bildraum $\mathfrak{R}$. Wir sagen wohl auch, t in $\mathfrak{r}$ *induziere* die Transformation T in $\mathfrak{R}$. Die Aufgabe, eine Übersicht über die möglichen Arten linearer Größen im affinen Raum zu gewinnen, ist demnach keine andere als das

Problem der Darstellung für die kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{g}$. Davon handelt das I. Kapitel dieser Arbeit. In der Folge sollen dann die Resultate ausgedehnt werden auf die Drehungsgruppe, die Komplexgruppe und schließlich — nach einer vorbereitenden Untersuchung über deren Struktur — auf alle kontinuierlichen halb-einfachen Gruppen von endlicher Parameterzahl.

Zwei Darstellungen $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*$ gleicher Dimensionszahl N sind einander *ähnlich* oder *äquivalent*, unterscheiden sich nur durch die *Orientierung*, wenn die eine aus der anderen durch eine affine Abbildung des Raumes $\mathfrak{R}$ hervorgeht, d. h. wenn es eine konstante Matrix A von N Zeilen und Kolonnen und einer von 0 verschiedenen Determinante gibt, so daß stets die beiden Matrizen T, T^*, welche in den Darstellungen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ demselben Element t von $\mathfrak{g}$ entsprechen, die Beziehung erfüllen

$$T^* = A^{-1} T A.$$

Eine Darstellung $\mathfrak{G}$ ist *reduzibel*, wenn es in $\mathfrak{R}$ eine „Ebene", d. i. eine lineare Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_1$ gibt, welche „unter dem Einfluß von $\mathfrak{g}$", d. i. durch die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in sich übergeht, und deren Dimensionszahl $N_1 > 0$ und $< N$ ist. Bei geeigneter Orientierung von $\mathfrak{R}$ erhalten wir dann aus der Darstellung $\mathfrak{G}$ eine N_1-dimensionale im Raume $\mathfrak{R}_1$ und eine $(N - N_1)$-dimensionale in jenem Raume, der aus $\mathfrak{R}$ durch Projektion nach $\mathfrak{R}_1$ hervorgeht (die Projektion wird bewerkstelligt durch die Übereinkunft, zwei Vektoren in $\mathfrak{R}$ als gleich zu betrachten, welche mod $\mathfrak{R}_1$ einander kongruent sind, deren Differenz in $\mathfrak{R}_1$ liegt). Die einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}$ entsprechende Größenart nennen wir *einfach*. — Hat man in $\mathfrak{R}$ zwei gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariante lineare Vektorräume $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$, so daß jeder Vektor in $\mathfrak{R}$ sich additiv auf eine und nur eine Weise aus einem in $\mathfrak{R}_1$ und einem in $\mathfrak{R}_2$ gelegenen Bestandteil zusammensetzt — die Dimensionszahlen N_1, N_2 erfüllen dann die Gleichung $N_1 + N_2 = N$, $\mathfrak{R}$ ist „zerspalten" in $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ — so *zerfällt* die Darstellung $\mathfrak{G}$ in eine N_1-dimensionale $\mathfrak{G}_1$, deren Träger der Raum $\mathfrak{R}_1$ ist, und eine N_2-dimensionale im Raume $\mathfrak{R}_2$; $\mathfrak{G}$ ist vollreduzibel auf die Summe $\mathfrak{G}_1$ plus $\mathfrak{G}_2$. Jede Größe der Art $(\mathfrak{G})$ setzt sich additiv zusammen aus zwei unabhängigen Bestandteilen, einer Größe der Art $(\mathfrak{G}_1)$ und einer Größe der Art $(\mathfrak{G}_2)$. Es wird ein Hauptergebnis der zu entwickelnden Theorie sein, daß *jede lineare Größe sich in voneinander unabhängige einfache Größen zerspalten läßt*. Aus zwei Darstellungen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in N und N' Dimensionen kann nach Hurwitz durch Komposition eine neue $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{G}'$ in $N \cdot N'$ Dimensionen hergeleitet werden: man ordnet t diejenige lineare Transformation zu, welche die Größen

$$(0) \qquad x_i x_j' \qquad (i = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, N'$$

fahren, wenn die x_i der Transformation T und die x_j' der Transformation T' unterworfen werden ($t \to T$ in $\mathfrak{G}$, $t \to T'$ in $\mathfrak{G}'$).

Die einzigen linearen Größen, welche bisher von den Mathematikern ausfindig gemacht wurden und in der Physik auftraten, sind die *Tensoren* dem weiten Sinne, wie Einstein das Wort gebraucht hat. Bildet an aus den Komponenten

$$x_i, y_i, z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gend dreier Vektoren in $\mathfrak{r}$ relativ zu einem willkürlichen Koordinatenstem die n^3 Zahlen

$$x_i y_k z_l \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

erfahren diese beim Übergang zu einem andern Koordinatensystem ermittels t eine t zugeordnete homogene lineare Transformation in n^3 ariablen, es entsteht die Darstellung $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^3$. Jedes vom Koordinatensystem abhängige System von Zahlen f_{ikl}, das sich in der gleichen Weise transformiert, wird als ein Tensor 3. Stufe bezeichnet. Es ist bequem, statt seiner Komponenten die Trilinearform

1) $$f(\xi\eta\zeta) = \sum_{ikl} f_{ikl} \xi^i \eta^k \zeta^l$$

zu benutzen, wo dann die Variablenreihen ξ, η, ζ kontragredient zu den Vektorkomponenten oder kogredient zu den Grundvektoren des Koordinatensystems in $\mathfrak{r}$ zu transformieren sind. In den geometrischen und physikalischen Anwendungen zeigte sich stets, daß eine Größenart nicht allein durch Angabe der Tensorstufe, sondern außerdem durch *Symmetriebedingungen* charakterisiert ist. So sind die möglichen Werte einer Spannung durch den Begriff „symmetrischer Tensor 2. Stufe" umschrieben, die möglichen Werte der vierdimensionalen elektromagnetischen Feldstärke durch den Begriff „schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe". Eine (lineare) Symmetriebedingung für einen Tensor ν-ter Stufe f hat allgemein die Gestalt:

$$\sum_P \alpha_{P^{-1}} fP = 0.$$

Dabei durchläuft P die sämtlichen $\nu!$ Permutationen der ν Variablenreihen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; fP ist die Form, welche aus f durch Ausübung der Permutation P hervorgeht, α_P ein den Permutationen P zugeordnetes Konstantensystem [1]). Eine bestimmte *Art* oder *Klasse von Tensoren* ist außer durch die Stufenzahl durch (keine,) eine oder mehrere derartige Symmetriebedingungen gekennzeichnet. Die sämtlichen Tensoren einer Klasse bilden eine

[1]) Es wird sich später zeigen, warum es bequem ist, den Faktor von fP nicht der Permutation P, sondern P^{-1} zuzuordnen.

lineare Mannigfaltigkeit, sagen wir von N Dimensionen, die gegenüber den Raumtransformationen t invariant ist; im „N-dimensionalen Tensorraum“ $\mathfrak{R}$ induziert $\mathfrak{g}$ eine Darstellung $\mathfrak{G}$. Die Erfahrungen der Mathematiker und Physiker legen die Vermutung nahe, daß so die allgemeinste Darstellung überhaupt zustande kommt, daß *es keine anderen linearen Größen gibt als die Tensoren* (wobei in den Tensorbegriff die Symmetriebedingungen aufzunehmen sind). Dieser Satz, in dem ich die eigentliche gruppentheoretische Rechtfertigung des Tensorkalküls erblicke, wird im folgenden in der Tat bewiesen werden. Er besagt, daß man alle Darstellungen gewinnt durch Reduktion der Potenzen von $\mathfrak{g}$ und daß die Ausscheidung der irreduziblen Bestandteile aus $\mathfrak{g}^\nu$ durch Symmetriebedingungen geschieht.

Aber die Theorie erschöpft sich nicht in diesem Ergebnis. In ihm dokumentiert sich der enge Zusammenhang, welcher zwischen der kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n)}$ und der endlichen Gruppe $\Sigma = \Sigma_\nu$ der sämtlichen Permutationen von ν Dingen besteht. Es gilt nun, aus diesem Zusammenhang heraus einen möglichst vollständigen Einblick zu gewinnen in den Bau der möglichen Symmetriebedingungen, der einfachen Größen, die auftretenden Dimensionszahlen usw. Es zeigt sich, daß man erst von hier aus ein rechtes Verständnis gewinnt für die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe Σ samt den dazu gehörigen Formeln für die Gradzahlen und Charaktere, die wir dem Meister der Gruppentheorie, Frobenius, vor allem verdanken [2]). — Unter der Einschränkung, daß die Komponenten der darstellenden Matrix T ganze rationale Funktionen der dargestellten sein sollen, ist unser Problem von Herrn I. Schur nach einer direkten algebraischen Methode in seiner Dissertation 1901 behandelt worden; die Beziehung zu den Darstellungen der symmetrischen Gruppe kommt dabei zu deutlichem Ausdruck. Mit der additiven Zerlegung eines beliebigen Tensors in einfache Tensorgrößen beschäftigen sich zwei Arbeiten von A. Young [3]), die den Anstoß zu der zweiten der oben zitierten Frobeniusschen Untersuchungen gegeben haben; man vgl. ferner darüber das letzte Kapitel des Buches von J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül (Berlin 1924). Wie die Darstellung der symmetrischen Gruppe Σ ohne weiteres zu einem Überblick über die möglichen Symmetrieklassen von Tensoren führt, habe ich in einer kleinen Note [4]) dargelegt. Vom Lieschen Standpunkt der infinitesimalen Transformationen aus hat E. Cartan bereits 1913 nicht

[2]) Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsber. Berl. Akad. 1900, S. 516; Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, ebenda 1903, S. 328. Ich zitiere diese Arbeiten als Fr. I, II.

[3]) Proc. London Math. Soc. **33** (1900), S. 97; **34** (1901), S. 361.

[4]) Rend. Circ. Mat. Palermo **48** (1924), S. 29.

ur für die Gruppe $\mathfrak{g}$, sondern für alle halb-einfachen Gruppen eine Me-
hode zur Erzeugung aller irreduziblen Darstellungen angegeben[5]). Hier
ollen alle diese Fäden zu einem einheitlichen Ganzen verwoben werden.
Herr I. Schur entwickelte kürzlich[6]) an der Drehungsgruppe eine neue
Methode, die ich so modifizieren und ausgestalten konnte, daß sie zur
Beherrschung aller halb-einfachen Gruppen geeignet wird[7]) und im Falle
er Gruppe $\mathfrak{g}$ die mannigfachen Beziehungen, von denen eben die Rede
war, allseitig aufklärt und durchleuchtet.

§ 2.

Cartans infinitesimale Methode: Die Gewichte.

Eine in abstracto gegebene r-parametrige infinitesimale Gruppe ist
ine r-dimensionale lineare Vektormannigfaltigkeit; die Addition der Vek-
oren gibt die Komposition der Gruppenelemente wieder. Aber neben die
Komposition tritt die Kommutatorbildung, die aus zwei willkürlichen
Elementen u, v der Gruppe ein Element $w = [u\,v]$ erzeugt. Sie ist als
ine Multiplikation zu betrachten, da sie sowohl in bezug auf den ersten
Faktor:

$$[u + u', v] = [u\,v] + [u'\,v], \quad [\alpha u, v] = \alpha\,[u, v] \qquad (\alpha \text{ eine beliebige Zahl})$$

ls in bezug auf den zweiten Faktor dem distributiven Gesetz gehorcht.
An Stelle des kommutativen und assoziativen Gesetzes treten aber die
olgenden:

$$[v\,u] = -\,[u\,v],$$

$$[u\,[v\,w]] + [v\,[w\,u]] + [w\,[u\,v]] = 0.$$

Sind die Elemente Matrizen (infinitesimale lineare Transformationen), so
st die Kommutatorbildung erklärt durch:

$$[u\,v] = u\,v - v\,u.$$

Die infinitesimalen Operationen der Gruppe $\mathfrak{g}$ bilden *die infinitesimale Gruppe* $\mathfrak{g}^0$ *der Matrizen von der Spur* 0; ihre Parameterzahl r ist $= n^2 - 1$. Unter Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems
ondern wir aus $\mathfrak{g}^0$ die $(n-1)$-parametrige Abelsche Gruppe der Dia-
gonal- oder Hauptmatrizen aus:

---

[5]) Bull. Soc. Math. de France 41, S. 53 (zitiert als Cartan II). Ferner Journ. de Mathém. 6, 10 (1914), S. 149. Diese Arbeiten stützen sich auf die Thèse von Cartan, Paris 1894, in welcher die Killingsche Tabelle der in abstracto vorhandenen halb-einfachen Gruppen sichergestellt wurde.

[6]) Drei Abhandlungen in den Sitzungsber. Berl. Akad. 1924, S. 189, 297, 346.

[7]) Vorläufige Mitteilungen über meine Ergebnisse sind erschienen: Gött. Nachr. 1925; Sitzungsber. Berl. Akad. 1924, S. 338.

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{matrix} \right\| = h = h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n);$$

die λ sind Variable, die an die eine Bedingung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \tag{2}$$

gebunden sind. Für $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ verstehen wir ferner unter e_{ik} diejenige Matrix, die im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile mit der k-ten Kolonne eine 1 trägt, sonst aber aus lauter Nullen besteht. Die e_{ik} bilden zusammen mit h eine *Basis* der Gruppe $\mathfrak{g}^0$; denn jedes Element von $\mathfrak{g}^0$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form schreiben:

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + \sum_{i \neq k} \tau_{ik} e_{ik}. \tag{3}$$

Die *Konstitutionsformeln* der Gruppe $\mathfrak{g}^0$ lauten wie folgt:

$[hh'] = 0$ für irgend zwei h.

$[h e_{ik}] = (\lambda_i - \lambda_k) e_{ik}$.

Um dieser Beziehung willen heißen die Linearformen $\lambda_i - \lambda_k$ der Variablen λ *Wurzeln* unserer Gruppe; $e_{ik} = e_\alpha$ ist das zur Wurzel $\alpha = \lambda_i - \lambda_k$ gehörige Element.

$[e_\alpha e_{-\alpha}] = h_\alpha$, d. i. gleich demjenigen h, für welches $\lambda_i = 1$, $\lambda_k = -1$, alle übrigen $\lambda = 0$ sind.

$$[e_\alpha e_\beta] = \begin{cases} e_{\alpha+\beta} \\ 0 \end{cases},$$ je nachdem $\alpha + \beta \neq 0$ wiederum eine Wurzel ist oder nicht.

Das Problem der Darstellung für eine in abstracto gegebene infinitesimale Gruppe besteht darin, in homogen-linearer Weise ihren Elementen Matrizen U so zuzuordnen, daß dem Kommutatorprodukt $[uv]$ zweier Elemente u, v immer das Kommutatorprodukt

$$[UV] = UV - VU$$

der zugeordneten Matrizen U, V entspricht. Wenn eine aus r Elementen bestehende Basis der infinitesimalen Gruppe vorliegt, genügt es, für jedes dieser Basiselemente die korrespondierende Matrix anzugeben. Es handelt sich also um ein *rein algebraisches Problem*. Geht man von der kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{g}$ und einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{G}$ derselben aus, so liegen in dieser Zurückführung auf die infinitesimalen Operationen gewisse Differenzierbarkeitsannahmen, die wir als erfüllt voraussetzen. Auch wenn es sich ursprünglich nur um eine Darstellung der *reellen* Gruppe handelt, können wir dann in (3) die Parameter λ_i, τ_{ik} unbedenklich kom-

lex werden lassen und zu einer Darstellung $\mathfrak{G}^0$ der vollen komplexen nfinitesimalen Gruppe $\mathfrak{g}^0$ übergehen. Die Elemente von $\mathfrak{g}^0$ wurden mit leinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, die ihnen in $\mathfrak{G}^0$ entsprechenden latrizen sollen durch den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben ezeichnet werden. $H(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ist eine homogen-linear von den an ie Bedingung (2) gebundenen Parametern λ abhängige Matrix, und wir aben für die gesuchte infinitesimale Gruppe $\mathfrak{G}^0$ linearer Transforma- onen im N-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}$ die Konstitutionsformeln:

$$[HH'] = 0, \qquad [HE_\alpha] = \alpha E_\alpha,$$

$$[E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha, \qquad [E_\alpha E_\beta] = \begin{cases} E_{\alpha+\beta}, \\ 0 \end{cases}$$

nachdem $\alpha + \beta + 0$ Wurzel ist oder nicht. Das ist der algebraische nsatz des Problems. Weiter folgt in diesem und dem nächsten Para- raphen ein das Wesentliche herausschälender Bericht über die Cartansche ntersuchung.

Da wir fast ausschließlich mit den darstellenden Matrizen im Bild- aum $\mathfrak{R}$ zu operieren haben, mögen die kleinen lateinischen Buchstaben uch zur Bezeichnung der Vektoren in diesem Raum Verwendung finden. ine N-dimensionale Matrix E bedeutet uns eine inf. Transformation in $\mathfrak{R}$, ie dem willkürlichen Vektor x einen Zuwachs

$$dx = Ex$$

rteilt. Gilt für einen Vektor e die Gleichung

$$He = \Lambda \cdot e$$

lentisch in λ, wo Λ eine Linearform der λ ist, so sagen wir, e sei vom *ewichte* Λ; und, falls $e + 0$ ist, Λ sei ein Gewicht der vorliegenden arstellung $\mathfrak{G}^0$.

Ist der Vektor x vom Gewichte Λ, so ist Hx gleichfalls vom Ge- ichte Λ, $E_\alpha x$ aber vom Gewichte $\Lambda + \alpha$. Es genügt, das Zweite zu eweisen:

$$HE_\alpha x = [HE_\alpha]x + E_\alpha Hx = \alpha \cdot E_\alpha x + \Lambda \cdot E_\alpha x.$$

Ein Vektor x vom Gewichte Λ, der gleich einer Summe von Vektoren nderen Gewichtes ist, ist notwendig $= 0$. Ist nämlich

$$x = x_1 + x_2 + \ldots \tag{4}$$

nd sind $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ die Gewichte von $x_1, x_2, \ldots$, so bilde man das Polynom

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - \Lambda_1)(\zeta - \Lambda_2) \ldots .$$

Vendet man die Operation $\varphi(H)$ auf die Gleichung (4) an, so kommt echts 0, links $\varphi(\Lambda) \cdot x$.

Mit Hilfe einer Basis $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ der linearen Schar aller Matrizen H, *die untereinander vertauschbar sind*, schließt man in bekannter Weise, *daß es überhaupt Gewichte gibt*, daß ein von 0 verschiedener Vektor e existiert, dessen durch H bewirkter Zuwachs He ein Multiplum von e ist. Liegt eine irreduzible Darstellung vor, so verschafft man sich sogar leicht ein Koordinatensystem $e_1, e_2, \ldots, e_N$ des Raumes $\mathfrak{R}$, das aus lauter Vektoren von bestimmtem Gewicht besteht[8]). H wird dann wie h eine Diagonalmatrix. Denn man gehe von einem Vektor $e \neq 0$ aus, der das Gewicht Λ besitzt, und konstruiere die kleinste gegenüber $\mathfrak{G}^0$ invariante Vektormannigfaltigkeit, welche e enthält. Man bilde also die Reihe

$$e,\ E_\alpha e,\ E_{\alpha'} E_\alpha e, \ldots, \tag{5}$$

wo für $\alpha, \alpha', \ldots$ unabhängig voneinander alle Wurzeln der Gruppe $\mathfrak{g}^0$ eintreten. Spätestens nach dem N-ten Schritt hört diese Reihe auf, neue Vektoren, d. h. solche, die von den vorangehenden linear unabhängig sind, zu erzeugen. Die Vektoren der Reihe spannen zusammen eine gegenüber $\mathfrak{G}^0$ invariante Ebene $\mathfrak{R}'$ auf; wenn aber $\mathfrak{G}^0$ irreduzibel ist, muß $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$ sein. Jeder Vektor der Reihe hat sein bestimmtes Gewicht: Λ, $\Lambda + \alpha$, $\Lambda + \alpha + \alpha'$, $\ldots$.

Unser Vorgehen wird vielleicht durchsichtiger, wenn wir uns einen Augenblick nicht auf den infinitesimalen, sondern den integralen Standpunkt stellen. Durch Iteration der inf. linearen Transformation h des Raumes $\mathfrak{r}$ entsteht die endliche Transformation, welche durch die Diagonalmatrix (ε) mit den Gliedern

$$\varepsilon_i = e^{\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \prod_i \varepsilon_i = 1)$$

gekennzeichnet wird. Ihr entspricht in der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}$ die Diagonalmatrix (E) mit den Gliedern

$$\mathsf{E}_i = e^{\Lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

wo jedes der Gewichte Λ_i die Form

$$\Lambda = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_n \lambda_n, \tag{6}$$

jedes der E_i also die Form

$$\mathsf{E} = \varepsilon_1^{m_1} \varepsilon_2^{m_2} \ldots \varepsilon_n^{m_n} \tag{7}$$

---

[8]) Das gleiche läßt sich durch eine kompliziertere Analyse für die reduziblen Darstellungen erreichen; vgl. Cartan, Thèse, Kap. VIII. Wir haben dieses Resultat jedoch hier nicht nötig, es wird sich übrigens aus dem Fortgang unserer Untersuchung von selber mitergeben.

esitzt. Eine „willkürliche" Transformation t von $\mathfrak{g}$ ist zu einer Haupt-ansformation (ε) innerhalb $\mathfrak{g}$ konjugiert:

$$t = u^{-1}(\varepsilon)u.$$

sind die charakteristischen Wurzeln oder — wie ich lieber sagen will, amit sich das Beiwort „charakteristisch" nicht allzusehr häuft — die *ultiplikatoren von* t. Aus (8) folgt für die Darstellung $\mathfrak{G}$ eine ent-rechende Gleichung:

$$T = U^{-1}(\mathsf{E})U.$$

ie Spur von T ist demnach gleich der Spur von (E), gleich der Summe er Terme E_i von der Gestalt (7). Die Spur $\chi(t)$ der von t induzierten ransformation T heißt *die Charakteristik der Darstellung* $\mathfrak{G}$; sie ist das enaue Analogon zu dem Frobeniusschen Begriff des Charakters bei einer ndlichen Gruppe. Die Summe der E_i ist demnach gleich der Charak-eristik, ausgedrückt durch die Multiplikatoren von t; und die Bestimmung er Gewichte Λ_i und ihrer Vielfachheit ist identisch mit der Berechnung on $\chi(t)$ als Funktion der Multiplikatoren ε_i von t: jedem Gewichte (6) orrespondiert in der Charakteristik ein Potenzprodukt (7). Da die Matrix (ε) nerhalb $\mathfrak{g}$ zu derjenigen konjugiert ist, die aus ihr durch eine Vertau-chung der Glieder ε_i hervorgeht, muß die Charakteristik eine *symmetrische* unktion der Multiplikatoren sein. Für die Gewichte besagt das, daß *mit inem Gewicht* (6) *auch immer dasjenige auftritt, das aus ihm durch ine beliebige Permutation der Variablen* λ_i *hervorgeht.* In Anbetracht der ariablenbindung (2) kann man die Koeffizienten in einer Linearform (6) er λ eindeutig so normieren, daß $m_n = 0$ wird. Wir werden hernach aus der nalysis situs des Gebildes $\mathfrak{g}$ heraus beweisen, daß die Charakteristik $\chi((\varepsilon))$ ne eindeutige Funktion von (ε) sein muß, wenn die Parameter λ_i rein naginär sind. Bei der Normierung $m_n = 0$ müssen daher die auftreten-en Exponenten m_i ganze Zahlen sein; oder, unabhängig von der Normie-ung ausgedrückt: *für ein Gewicht* Λ *unterscheiden sich die Koeffizienten* $_i$ *um ganze Zahlen.* Das ist der wesentlichste Schritt zur Erkenntnis, aß nur ganze rationale Darstellungen von $\mathfrak{g}$ existieren.

Durch die infinitesimale Methode werden die beiden eben durch Kursiv-ruck hervorgehobenen Tatsachen durch eine Überlegung bestätigt, welche der ganzen Theorie der inf. Gruppen eine fundamentale Rolle spielt. s bezeichne Λ_α den Wert des Gewichtes Λ für $H = H_\alpha$, d. h. falls man $= 1$, $\lambda_k = -1$, alle übrigen $\lambda = 0$ setzt:

$$\Lambda_\alpha = m_i - m_k. \tag{9}$$

sbesondere ist $\alpha_\alpha = 2$.

Satz 1. *Ist* Λ *ein Gewicht, so auch* $\Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$; Λ_α *ist eine ganze Zahl.*

Beweis. Λ sei extrem in bezug auf α, d. h. es sei wohl Λ, aber nicht $\Lambda + \alpha$ ein Gewicht.

$$He = \Lambda \cdot e \qquad (e = e_0 \neq 0).$$

Man bilde die Vektoren

$$E_{-\alpha} e = e_1, \; E_{-\alpha} e_1 = e_2, \; \ldots$$

vom Gewichte $\Lambda - \alpha$, $\Lambda - 2\alpha$, ... Da allgemein

$$He_i = (\Lambda - i\alpha) \cdot e_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots$$

ist, gilt insbesondere

$$H_\alpha e_i = (\Lambda - i\alpha)_\alpha e_i. \tag{10}$$

In der Reihe $e_0, e_1, e_2, \ldots$ sei e_{h+1} der erste Vektor, welcher verschwindet. Gewinnt man nun, wenn man von dem Vektor e_h mit dem Gewichte $\Lambda - h$ ausgeht, durch Anwendung der Operation E_α sukzessive die gleichen Vektoren in umgekehrter Reihenfolge zurück? Das ist in der Tat der Fall; es gelten nämlich Gleichungen

$$E_\alpha e_i = \mu_i e_{i-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Beweis durch vollständige Induktion: Die Behauptung ist richtig für $i = 0$, wobei $\mu_0 = 0$ zu nehmen ist und die Bedeutung von e_{-1} infolgedessen gleichgültig ist. Denn $E_\alpha e$ ist ein Vektor vom Gewichte $\Lambda + \alpha$, und da das Gewicht $\Lambda + \alpha$ nicht auftritt, notwendig $= 0$. Der Übergang von i zu $i + 1$ stützt sich auf die Gleichung (10) und die Tatsache, daß

$$[E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha$$

ist:

$$E_\alpha e_{i+1} = E_\alpha E_{-\alpha} e_i = H_\alpha e_i + E_{-\alpha} E_\alpha e_i = (\Lambda - i\alpha)_\alpha e_i + \mu_i E_{-\alpha} e_{i-1}.$$

Es ergibt sich daraus noch die Rekursionsformel

$$\mu_{i+1} = \mu_i + (\Lambda - i\alpha)_\alpha;$$

daher ist

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{i-1} (\Lambda - j\alpha)_\alpha.$$

Weil $e_{h+1} = 0$, aber $e_h \neq 0$ ist, muß $\mu_{h+1} = 0$ sein. Das liefert die Gleichung

$$(h+1)\left(\Lambda_\alpha - \frac{1}{2} h \alpha_\alpha\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \Lambda_\alpha = h.$$

Der Satz ist damit für das extreme Gewicht Λ, für das wir ihn eigentlich allein brauchen, bewiesen, überträgt sich nun aber sogleich auf die ganze Serie von Gewichten

$$\Lambda, \; \Lambda - \alpha, \; \Lambda - 2\alpha, \; \ldots, \; \Lambda - h\alpha.$$

Die lineare Substitution der Variablen λ, welche jede Linearform Λ derselben in $\Lambda' = \Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$ verwandelt, führt nämlich diese Reihe in die inverse über, die man erhält, wenn man sie rückwärts durchläuft.

Die erwähnte Substitution ist aber wegen (9) nichts anderes als die Vertauschung von λ_i mit λ_k, und das gesteckte Ziel ist somit erreicht.

§ 3.

Cartans infinitesimale Methode: Bestimmung einer irreduziblen Darstellung durch ihr höchstes Gewicht.

Bis hierher verläuft die Überlegung in Bahnen, welche Cartan durch die algebraische Tradition mehr oder weniger vorgezeichnet waren. Seine eigentliche originelle Leistung liegt in der Aufstellung und dem Beweis von

Satz 2. *Eine irreduzible Darstellung ist durch ihr höchstes Gewicht eindeutig bestimmt; dies Gewicht ist stets von der Multiplizität* 1.

Normieren wir die Koeffizienten m_i einer Linearform (6) durch die symmetrische Bedingung

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0, \tag{11}$$

so wollen wir Λ positiv nennen, wenn der erste von 0 verschiedene Koeffizient in der Reihe $m_1, m_2, \ldots, m_n$ positiv ist. Von zwei derartigen Linearformen

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i, \qquad \Lambda' = \sum_{i=1}^{n} m_i' \lambda_i$$

soll Λ' die höher stehende heißen, wenn $\Lambda' - \Lambda$ positiv ist. Diese Rangordnung liegt der Bestimmung des „höchsten Gewichtes" zugrunde. Die Normierung (11) bringt es mit sich, daß die Koeffizienten m_i der Gewichte unter Umständen gebrochene Zahlen mit dem Nenner n werden. Für die Charakteristik als Funktion der ε_i kommt die Rangordnung hinaus auf die bekannte lexikographische Anordnung der Potenzprodukte. Satz 2 besagt, daß das höchste Glied der Charakteristik den Koeffizienten 1 trägt und daß die irreduzible Darstellung durch dieses höchste Glied vollständig determiniert ist. Er ist somit ein Seitenstück und eine Verschärfung zu dem allgemeinen, nicht dem infinitesimalen Gedankenkreis entsprungenen Burnsideschen Theorem, daß eine irreduzible Darstellung durch ihre Charakteristik eindeutig festgelegt ist. — Da mit Λ auch immer diejenige Linearform als Gewicht auftritt, die daraus durch Vertauschung irgend zweier der Variablen λ_i, λ_k hervorgeht, muß das höchste Gewicht, wenn es in der Form

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_{n-1} \lambda_{n-1} \qquad (m_n = 0)$$

geschrieben wird, lauter ganzzahlige Koeffizienten haben, die den Ungleichungen

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n = 0 \tag{12}$$

genügen.

Man gehe von einem zum höchsten Gewicht Λ gehörigen Vektor $e \neq 0$ aus und bilde alle Vektoren (5). Es gilt der

Hilfssatz. *Wo in dieser Reihe ein Vektor vom höchsten Gewicht Λ auftritt, ist er ein Multiplum von e, $\varkappa e$, und der Faktor $\varkappa$ ist durch das höchste Gewicht und die Entstehung jenes Vektors aus e vermöge der Abbildungen E_α vollständig festgelegt.*

Beweis. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ mehrere Wurzeln und wird zur Abkürzung $E_{\alpha_i} = E_i$ gesetzt, so ist

$$E_m \ldots E_2 E_1 e \tag{13}$$

wie e vom Gewichte Λ, wenn

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 0 \tag{14}$$

ist. Behauptet wird, daß (13) gleich $\varkappa e$ ist, wo $\varkappa$ nur vom höchsten Gewicht Λ und den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ abhängt. Unter den Wurzeln α_i müssen wegen (14) positive vorkommen; α_l sei die erste. Im Falle $l = 1$ ist unsere Behauptung klar, da dann das Gewicht $\Lambda + \alpha_1$ von $E_1 e$ höher steht als Λ, und darum wegen der Bedeutung von Λ der Vektor $E_1 e = 0$ sein muß. Andernfalls ersetzen wir $e' = E_l E_{l-1} \ldots E_1 e$ durch

$$[E_l E_{l-1}] E_{l-2} \ldots E_1 e + E_{l-1} E_l E_{l-2} \ldots E_1 e. \tag{15}$$

Das erste Glied in (15) ist

entweder $= 0$: wenn $\alpha_l + \alpha_{l-1} \neq 0$, aber keine Wurzel ist;

oder $= \mu \cdot E_{l-2} \ldots E_1 e$: wenn $\alpha_l + \alpha_{l-1} = 0$ ist, $[E_l E_{l-1}]$ ist in diesem Fall gleich einem H und die Zahl μ das für dieses H berechnete Gewicht von $E_{l-2} \ldots E_1 e$;

oder es hat die Form $E_\beta E_{l-2} \ldots E_1 e$: wenn $\alpha_l + \alpha_{l-1} = \beta$ wiederum eine Wurzel ist. — In diesem Gliede ist also, falls es nicht verschwindet, die Anzahl der vor e stehenden Abbildungen E um 2 oder um 1 geringer als in e', der Faktor μ aber durch das höchste Gewicht und die Entstehungsart von e' bestimmt. Das zweite Glied der Formel (15) weist die positive Wurzel α_l nicht wie e' an l-ter, sondern schon an $(l-1)$-ter Stelle aut. Unter Berufung auf den vorausgeschickten Fall $l = 1$ ist damit der Hilfssatz durch vollständige Induktion bewiesen.

Aus ihm ergibt sich der Satz 2 — der natürlich so zu interpretieren ist, daß zwischen äquivalenten Darstellungen nicht unterschieden wird —, wie folgt. In den beiden irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_*$ sei e bzw. e^*

n Vektor vom höchsten Gewicht Λ. Neben der Reihe (5) betrachten r die analoge Reihe

*) $$e^*,\ E_a^* e^*,\ E_{a'}^* E_a^* e^*, \ldots,$$

o E_a^* in $\mathfrak{G}_*^0$ demselben Element e_a von $\mathfrak{g}^0$ korrespondiert wie E_a in $\mathfrak{G}^0$. dem Vektor der ersten Reihe ordnen wir den entsprechenden der zweiten eihe zu; wir erhalten so eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}^*$, vermöge ren die Darstellung $\mathfrak{G}^0$ in $\mathfrak{G}_*^0$ übergeht, vorausgesetzt, daß folgender tz gilt: Sind $e_1, e_2, \ldots, e_m$ irgendwelche Vektoren der ersten Reihe, wischen denen die homogene lineare Relation

(16) $$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m = 0$$

esteht, so sind die korrespondierenden Vektoren $e_1^*, e_1^*, \ldots, e_m^*$ der zweiten eihe durch die gleiche Relation miteinander verknüpft. Zum Beweise rdnen wir jeder solchen Relation (16) den Vektor

$$\gamma_1 e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \ldots + \gamma_m e_m^*$$

on $\mathfrak{R}^*$ zu. Sie alle zusammen bilden eine lineare Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{R}^*$, ie gegenüber $\mathfrak{G}_*^0$ invariant ist. Aber nach dem vorausgeschickten Hilfssatz *ommt in ihr der Vektor e^* nicht vor*, sie setzt sich zusammen aus lauter ektoren von niedrigerem Gewicht, und muß sich also wegen der voraus- esetzten Irreduzibilität von $\mathfrak{G}_*^0$ ganz und gar auf 0 reduzieren.

§ 4.

Erzeugung der irreduziblen Darstellungen.

Die allereinfachste Darstellung von $\mathfrak{g}^0$ kommt dadurch zustande, daß an jedem Element von $\mathfrak{g}^0$ die inf. Transformation $dx = 0$ der *einen* ariablen x zuordnet: jedem Element von $\mathfrak{g}$ entspricht die eindimensionale inheitsmatrix. Zweitens ist $\mathfrak{g}^0$ bzw. $\mathfrak{g}$ selber eine irreduzible Darstellung ieser Gruppe. Weiter kennt die analytische Geometrie diejenigen Gruppen $_2$, $\mathfrak{g}_3, \ldots$, nach denen sich die Flächenelemente, Raumelemente usw. trans- ormieren; die zugehörigen Dimensionszahlen sind bzw.

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\quad \ldots.$$

Das von zwei Vektoren $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ im Raume $\mathfrak{r}$ aufgespannte lächenelement $x \times y$ (der „zweidimensionale Vektor" in $\mathfrak{r}$, welcher durch äußere Multiplikation" aus den beiden eindimensionalen x und y hervor- eht) ist ein schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe mit den Komponenten

$$x_i y_k - x_k y_i.$$

Die äußeren Produkte je zweier verschiedener Grundvektoren $e_i \times e_k$ $(i < k)$

unseres Koordinatensystems in $\mathfrak{r}$ bilden eine Basis für die Gesamtheit der schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe. Bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem im Raume $\mathfrak{r}$ durch die Transformation t erleiden sie ihrerseits eine lineare Transformation, und auf diese Weise gewinnt man die erwähnte Darstellung $\mathfrak{g}_2$ von $\frac{n(n-1)}{2}$ Dimensionen. Erfährt e_i durch die inf. Transformation h den Zuwachs $de_i = \lambda_i e_i$, so hat der zweidimensionale Grundvektor $e_i \times e_k$ das Gewicht $\lambda_i + \lambda_k$:

$$d(e_i \times e_k) = (de_i \times e_k) + (e_i \times de_k) = (\lambda_i + \lambda_k)(e_i \times e_k).$$

Die in $\mathfrak{g}_2$ vorkommenden Gewichte sind also die $\frac{n(n-1)}{2}$ Linearformen $\lambda_i + \lambda_k$ $(i < k)$, das höchste unter ihnen ist $\lambda_1 + \lambda_2$. *Die Darstellung ist irreduzibel* gemäß dem

Hilfssatz. *Hat man den N-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}$ einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{G}$ auf ein Koordinatensystem von N Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_N$ bezogen, deren jeder ein bestimmtes Gewicht Λ_i besitzt, sind die N Gewichte Λ_i voneinander verschieden, und kann man alle N Grundvektoren e_i aus einem beliebigen von ihnen durch Ausübung der Transformationen von $\mathfrak{G}$ erzeugen, so ist $\mathfrak{G}$ irreduzibel.*

Denn es sei $\mathfrak{R}'$ eine lineare Vektormannigfaltigkeit in $\mathfrak{R}$, die gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}^0$ invariant ist und den von 0 verschiedenen Vektor

$$e = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_N e_N$$

enthält. Dann ist

$$He = \xi_1 \Lambda_1 e_1 + \xi_2 \Lambda_2 e_2 + \ldots + \xi_N \Lambda_N e_N.$$

Verschafft man sich also durch die Lagrangesche Interpolationsformel ein Polynom $\varphi(\zeta)$, das für $\zeta = \Lambda_1$ den Wert 1 hat, an den Stellen $\zeta = \Lambda_2, \ldots, \Lambda_N$ aber verschwindet, so ist

$$\varphi(H)e = \xi_1 e_1.$$

Ist $\xi_1 \neq 0$, so kommt demnach der Vektor e_1 in $\mathfrak{R}'$ vor. Wenigstens einer der Zahlkoeffizienten ξ_i ist aber $\neq 0$, und darum liegt wenigstens einer der Grundvektoren e_i in $\mathfrak{R}'$. Da aus ihm durch die Transformationen von $\mathfrak{G}$ alle anderen gewonnen werden können, ist $\mathfrak{R}'$ mit ganz $\mathfrak{R}$ identisch.

Die Mannigfaltigkeit der 1-dimensionalen, 2-dimensionalen, ... $(n-1)$-dimensionalen Vektoren in $\mathfrak{r}$ liefert uns also $n-1$ irreduzible Darstellungen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}$. Höchstes Gewicht und Dimensionszahl von $\mathfrak{g}_i$ sind

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i = \mu_i, \quad \text{bzw.} \quad \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \ldots i}.$$

ie mit irgendwelchen ganzen nicht-negativen Exponenten p_i daraus kom-
onierte Darstellung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_1^{p_1} \mathfrak{g}_2^{p_2} \cdots \mathfrak{g}_{n-1}^{p_{n-1}}$$

hält das höchste Gewicht

$$\Lambda = p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + \cdots + p_{n-1} \mu_{n-1} = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \cdots + m_{n-1} \lambda_{n-1},$$

obei

$$m_i = p_i + p_{i+1} + \cdots + p_{n-1}$$

t. Durch Reduktion kann man aus ihr eine *irreduzible* Darstellung mit
iesem höchsten Gewicht abspalten. Da andererseits zufolge der Un-
leichungen (12) sich jedes mögliche höchste Gewicht einer irreduziblen
arstellung aus den Gewichten μ_i additiv mittels nicht-negativer ganzer
oeffizienten p_i zusammensetzen läßt und zu einem vorgegebenen höchsten
ewicht nach Satz 2 nur eine einzige irreduzible Darstellung gehört, *haben*
ir damit eine Methode gefunden zur Erzeugung der sämtlichen irredu-
blen Darstellungen von $\mathfrak{g}$.

Man wird bei der Komposition zweier irreduzibler Darstellungen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$
as System der Größen $x_i x'_j$, vgl. Formel (0), als das Produkt des Vek-
ors (x_i) im Raum $\mathfrak{R}$ und des Vektors x'_j im Raume $\mathfrak{R}'$ bezeichnen. Ist
n $\mathfrak{R}$ ein Koordinatensystem gewählt $e_1, e_2, \ldots, e_N$, das aus lauter Vek-
oren von bestimmtem Gewicht Λ_i besteht, und hat dabei insbesondere e_1
as höchste Gewicht, ist ferner das Analoge im Raume $\mathfrak{R}'$ geschehen, so
esitzen die Produktvektoren $e_i e'_j$ im NN'-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$
egenüber der Gruppe $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ das Gewicht $\Lambda_i + \Lambda'_j$. Den irreduziblen Be-
tandteil vom höchsten Gewicht $\Lambda_1 + \Lambda'_1$ sucht Cartan[9]) dadurch aus
$\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ herauszulösen, daß er innerhalb $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ die kleinste lineare Mannig-
altigkeit $\mathfrak{R}^*$ betrachtet, welche alle aus $e_1 e'_1$ durch die Transformationen
on $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ hervorgehenden Vektoren enthält. Die Irreduzibilität der so
ntstehenden „Cartanschen Komponierten" $\mathfrak{G}^*$ ist jedoch — entgegen
er Meinung Cartans — keineswegs selbstverständlich. Mittels der zum
eweis des letzten Hilfssatzes verwendeten Methode sieht man zunächst
in: Werden in dem Ausdruck

$$e^* = \sum_{i,j} \eta_{ij} e_i e'_j$$

ines zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigen Vektors e^* immer alle Glieder von demselben Ge-
icht zusammengefaßt, so kommen die einzelnen Summanden von *ver-*
chiedenem Gewicht, in welche e^* dadurch zerspalten ist, mit e^* in $\mathfrak{R}^*$ vor.
Wir können in $\mathfrak{R}^*$ *also ein Koordinatensystem einführen* $e_1^* = e_1 e'_1$,
$e_2^*, \ldots$, *das aus lauter Vektoren von bestimmtem Gewicht besteht. Unter*

[9]) Cartan II, S. 64.

ihnen hat nur der Vektor e_1^* das höchste Gewicht $\Lambda_1^* = \Lambda_1 + \Lambda_1'$. Alle Vektoren von $\mathfrak{R}^*$ setzen sich additiv aus solchen zusammen, welche durch die Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^*$ aus e_1^* hervorgehen. Kann daraus auf die Irreduzibilität von $\mathfrak{G}^*$ geschlossen werden?

Soviel ich sehe, nur dann, wenn das Resultat des nächsten Paragraphen vorweggenommen wird: daß *jede reduzible Darstellung zerfällt*[10]. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß $\mathfrak{R}^*$ nicht in zwei Teilräume zerspalten werden kann $\mathfrak{R}_1^* + \mathfrak{R}_2^*$, die durch $\mathfrak{G}^*$ in sich transformiert werden. In einem dieser beiden Räume, etwa in $\mathfrak{R}_1^*$, muß ein Vektor vorkommen $\eta_1 e_1^* + \eta_2 e_2^* + \ldots$, für welchen die Komponente $\eta_1 \neq 0$ ist. Durch wiederholte Anwendung der Transformation H^* folgt dann wie oben, daß in $\mathfrak{R}_1^*$ auch $\eta_1 e_1^*$ und damit e_1^* vorkommt; mit e_1^* aber überhaupt alle Vektoren von $\mathfrak{R}^*$.

Bilden wir durch die Cartansche Komposition z. B. $\mathfrak{g}_1^2 \mathfrak{g}_2!$ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bezeichnet das im Raum $\mathfrak{r}$ zugrunde gelegte Koordinatensystem. Auf

$$e_1 e_1 (e_1 \times e_2) \tag{17}$$

müssen alle Transformationen t von $\mathfrak{g}$ angewendet werden. t laute etwa

$$e_1' = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$
$$e_2' = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(17) geht durch t über in

$$\sum \xi_i \xi_k (\xi_l \eta_m - \xi_m \eta_l) e_i e_k e_l e_m. \tag{18}$$

Aus Ausdrücken von der Form

$$\xi_i \xi_k \xi_l \eta_m$$

lassen sich alle Tensoren 4-ter Stufe zusammensetzen, die in den drei ersten Indizes symmetrisch sind. Diese entstehen aus dem allgemeinsten Tensor 4. Stufe durch „Mischung" der ersten drei Indizes, d. h. indem man die aus ihm durch die 3! Permutationen jener Indizes hervorgehenden Tensoren addiert. Auf den in $i\,k\,l$ symmetrischen Tensor f_{iklm} ist dann dem Ausdruck (18) zufolge noch die „Alternation" (Bildung der *alternierenden* Summe aus den durch Permutation entstehenden Tensoren) in bezug auf die Indizes l und m auszuüben:

$$f_{iklm} - f_{ikml}.$$

Innerhalb der so erzeugten Vektormannigfaltigkeit induziert $\mathfrak{g}$ eine irre-

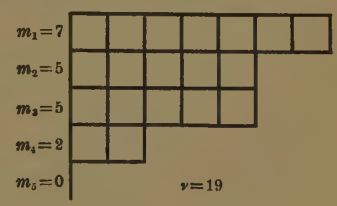
[10]) Hier liegt also eine empfindliche Lücke in der Cartanschen Untersuchung vor. Auch die Beweisführung in Cartan II, Abschn. I, 4 (S. 58—59) scheint mir nicht zwingend zu sein.

uzible Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$, nämlich diejenige vom höchsten Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2$.

Um das allgemeine Resultat auszusprechen, verwenden wir statt der omponenten eines Tensors nach (1) die zugehörige mehrfache Linearform. s gilt, die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}$ vom höchsten Gewichte

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots \qquad (m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots)$$

ı erzeugen. Die Summe der ganzen nicht-negativen Zahlen $m_1 + m_2 + \ldots$ erde $= \nu$ gesetzt. Wir teilen die Ziffern 1 bis ν in Abschnitte von der änge $m_1, m_2, \ldots$ und denken uns die Abschnitte untereinander ge-chrieben, wie es das Schema $\{m\}$ andeutet. nter A verstehen wir die Gruppe derjenigen ermutationen A der ν Ziffern, bei welchen ur die in den Vertikalstollen stehenden Zif-rn untereinander vertauscht werden, unter B ie Gruppe der Permutationen B, welche le-iglich die Ziffern der Horizontalreihen des chemas untereinander vertauschen. Durch-uft A die Gruppe A, B die Gruppe B, so durchläuft AB ohne Wieder-olung den Komplex AB. Es werde für eine beliebige Permutation P er ν Ziffern $\varepsilon_P = 0$ gesetzt, wenn P nicht dem Komplex AB angehört, ndernfalls aber, wenn $P = AB$ ist, $\varepsilon_P = +1$ oder -1, je nachdem A ne gerade oder ungerade Permutation ist. Aus dem allgemeinsten Tensor -ter Stufe f erzeugen wir durch Anwendung des Operators



Schema $\{m\}$.

19) $$e = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} P$$

en Tensor

20) $$f^* = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} f P.$$

Satz 3. *Die sämtlichen Tensoren f^*, die aus Tensoren ν-ter Stufe f urch Anwendung des zum Schema $\{m\}$ gehörigen Operators e entstehen, ilden eine Klasse einfacher Größen, und die zugehörige Darstellung $\mathfrak{G}$ on $\mathfrak{g}$ hat das höchste Gewicht $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots$. Auf diese Weise kommt ie allgemeinste irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ zustande.*

Wenn in dem Schema nicht alle Vertikalstollen eine Länge $\leqq n$ haben, t f^* identisch $= 0$. Ist hingegen jene Bedingung erfüllt, so kommt es ur auf die *Unterschiede* der ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ an; man kann lso dafür sorgen, daß $m_n = 0$ wird, doch ist es für die allgemeinen Be-rachtungen zweckmäßiger, von dieser Normierung abzusehen.

Die Komponenten der Matrix T in unserer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{H}$ werden offenbar ganze rationale Funktionen ν-ter Ordnung der Kom-

ponenten von t. Lassen wir die letzteren frei variieren, so bilden die T zugleich eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\tilde{\mathfrak{g}}$ aller (reellen oder komplexen) Transformationen mit einer von 0 verschiedenen (oder mit einer positiven) Determinante. Daß die Aufzählung für $\tilde{\mathfrak{g}}$ aber nicht erschöpfend ist und inwiefern sich $\tilde{\mathfrak{g}}$ überhaupt wesentlich komplizierter als $\mathfrak{g}$ verhält, werden wir am Schlusse dieses Kapitels in § 8 betrachten.

§ 5.

Der Satz von der vollen Reduzibilität.

Den Beweis des Satzes, daß eine reduzible Darstellung notwendig zerfällt, vermag ich nicht mehr durch die infinitesimale algebraische Methode zu erbringen; von jetzt ab bedienen wir uns der transzendenten Integrationsmethode, die zuerst von Hurwitz zur Erzeugung der Invarianten ausgebildet[11]) und dann im gleichen Sinne wie hier von Herrn I. Schur auf die Darstellungen der Drehungsgruppe angewendet wurde. In allen Fällen, wo bisher ein Nachweis der vollen Reduzibilität gelungen ist, *beruht er auf der Konstruktion einer invarianten definiten quadratischen bzw. Hermiteschen Form.* Hat man eine Gruppe $\mathfrak{h}$ reeller homogen-linearer Transformationen in einem n-dimensionalen Raum $\mathfrak{r}$ und eine positiv-definite quadratische Form Q, welche durch die Transformationen von $\mathfrak{h}$ in sich übergeht, so wird $\mathfrak{r}$ durch die Form Q zu einem metrisch-euklidischen Raum gestempelt. Läßt $\mathfrak{h}$ einen Teilraum $\mathfrak{r}_1$ von n_1 Dimensionen invariant, so auch den zu $\mathfrak{r}_1$ senkrechten Raum $\mathfrak{r}_2$ von $n_2 = n - n_1$ Dimensionen, der aus allen Vektoren besteht, die im Sinne der Metrik Q zu den sämtlichen Vektoren von $\mathfrak{r}_1$ senkrecht sind: $\mathfrak{r}$ zerfällt in die beiden invarianten Teilräume $\mathfrak{r}_1$ plus $\mathfrak{r}_2$. Im Fall einer komplexen Transformationsgruppe leistet die gleichen Dienste eine invariante positiv definite Hermitesche Form. Zu einer Gruppe aus endlichvielen homogenen linearen Transformationen verschafft man sich eine solche Form durch Addition: Man geht von irgendeiner definiten Hermiteschen Form aus, etwa der Einheitsform

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_n \bar{x}_n$$

(der Querstrich bezeichnet die konjugiert-komplexe Größe) und bildet die Summe aller derjenigen, welche aus ihr durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehen. Will man das gleiche Verfahren auf die $\mathfrak{g}$ darstellende kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ anwenden, so tritt an die Stelle der Addition die Integration. Dazu bedarf man einer invarianten Volummessung

[11]) Gött. Nachr. 1897, S. 71.

uf der Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{g}$. Eine solche ist aber auf ihr wie auf der beliebigen Gruppenmannigfaltigkeit vorhanden.

Sind s, s' zwei unendlich benachbarte Elemente der r-parametrigen ontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{H}$, zwei unendlich benachbarte „Punkte" auf der ruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$, so ist $s' s^{-1}$ (ich lese die Zusammensetzung on links nach rechts) ein inf. Element von $\mathfrak{H}$; dieses oder das System einer Komponenten relativ zu einer fest gewählten Basis der zugehörigen nf. Gruppe $\mathfrak{H}^0$ bezeichne ich als den von s zu s' führenden *Vektor*. Als *olumen* eines parallelepipedischen Volumelements, das von s aus durch r nfinitesimale Vektoren aufgespannt wird, gilt wie üblich die Determinante us den Komponenten dieser Vektoren. Ist a ein gegebener Punkt auf $\mathfrak{H}$, o werde die Abbildung $s \to sa$ von $\mathfrak{H}$ auf sich selbst als *Translation* ezeichnet; es ist diejenige Translation, die das Einheitselement e in a berführt. Bei einer Translation bleiben die Vektoren erhalten (darin liegt ie Rechtfertigung für die Nomenklatur), und Volumelemente, die durch ranslation auseinander hervorgehen, haben deshalb das gleiche Volumen. as Volumen eines an der Stelle t der Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{g}$ befindchen Volumelements möge mit $|dt|$ bezeichnet werden. Ist $\mathfrak{G}$ eine N-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ und bedeutet $(h)T$ die Hermitesche orm, die aus der Einheitsform

$$(h) = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_N \bar{x}_N$$

n Raume $\mathfrak{R}$ durch die t korrespondierende Transformation T entsteht, o hat man demnach zu bilden:

$$\int (h) T \cdot |dt|, \tag{21}$$

ntegriert über die ganze Mannigfaltigkeit $\mathfrak{g}$. Es bleibt jedoch zweifelhaft, b dieses Integral einen Sinn hat; das Verfahren scheint zunächst daran u scheitern, daß $\mathfrak{g}$ keine *geschlossene* Mannigfaltigkeit ist. Diese Schwierigeit ist wesentlich; denn bestünde sie nicht, so müßte ja der Satz von er vollen Reduzibilität für beliebige kontinuierliche Gruppen gelten!

Aber im Falle der Gruppe $\mathfrak{g}$ wird sie überwunden durch den Geanken von Hurwitz, sich innerhalb $\mathfrak{g}$ zunächst auf die *unitären* Transormationen zu beschränken; die Gruppe $\mathfrak{g}_u$ der unitären Transformationen it der Determinante 1 ist in der Tat ein geschlossenes Gebilde. Ihre nfinitesimalen Operationen (τ_{ik}) sind durch die Beziehungen gekennzeichnet:

$$\tau_{ki} + \bar{\tau}_{ik} = 0, \quad \text{insbesondere} \quad \tau_{ii} = \lambda_i \quad \text{rein imaginär}; \quad \sum_i \lambda_i = 0.$$

hnen entspricht in $\mathfrak{G}^0$ ein Teilgebilde $\mathfrak{G}_u^0$. Gilt aber für die Darstellungen on $\mathfrak{g}_u^0$ der Satz, daß sie zerfallen, falls sie reduzibel sind, so gilt er auch ür die totale Gruppe $\mathfrak{g}^0$. Es sei nämlich $\mathfrak{R}_1$ eine gegenüber $\mathfrak{G}^0$ invariante

Ebene in $\mathfrak{R}$. Wir können dann nach Voraussetzung $\mathfrak{R}$ zerspalten in $\mathfrak{R}_1$ plus $\mathfrak{R}_2$, so daß $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ gegenüber $\mathfrak{G}_u^0$ invariant sind. Ein Koordinatensystem in $\mathfrak{R}_1$ liefert zusammen mit einem Koordinatensystem in $\mathfrak{R}_2$ ein solches für $\mathfrak{R}$. Relativ zu ihm hat die allgemeine Matrix von $\mathfrak{G}^0$ die nebenstehende Gestalt. Für die Matrizen von $\mathfrak{G}_u^0$ verschwinden ferner alle Glieder, welche in dem Rechteck [12] stehen. Jedes solche Glied ist eine lineare Form der Variablen τ_{ik}

$\mathfrak{R}_1$	*	[12]
$\mathfrak{R}_2$	0, . . ., 0 0, . . ., 0 . . . . 0, . . ., 0	*

$$\sum_i a_i \lambda_i + \sum_{i \neq k} a_{ik} \tau_{ik}.$$

Eine derartige Linearform verschwindet aber identisch, falls sie es unter der Einschränkung

$$\tau_{ki} + \bar{\tau}_{ik} = 0 \tag{22}$$

tut. Somit ist das Rechteck [12] auch identisch in $\mathfrak{G}^0$ gleich 0. Denn setzt man zunächst alle seitlichen $\tau_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, so lautet die Forderung $\sum_i a_i \lambda_i = 0$ für beliebige rein imaginäre Zahlen λ_i, deren Summe gleich 0 ist; daraus folgt $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Wählt man aber alle Variablen außer τ_{12} und τ_{21} gleich 0, so liefern die beiden besonderen, der Bedingung (22) genügenden Ansätze

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \sqrt{-1} \qquad | \qquad \tau_{12} = -\tau_{21} = 1$$

die Beziehungen

$$a_{12} + a_{21} = 0 \qquad | \qquad a_{12} - a_{21} = 0,$$

welche $a_{12} = a_{21} = 0$ zur Folge haben.

Aus einer Darstellung der infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{g}_u^0$ von $n^2 - 1$ reellen Parametern erhält man durch Integration nach Lie die zugeordnete Matrix T für alle diejenigen t von $\mathfrak{g}_u$, welche einer gewissen *Umgebung* des Einheitselements e angehören. Aber wählt man ein t_0 in dieser Umgebung, so kann man die Darstellung fortsetzen auf diejenige Umgebung von t_0, in welche die erste Umgebung durch die Translation von e nach t_0 übergeht. Der zu iterierende *Prozeß der Fortsetzung* stößt offenbar niemals gegen eine Grenze; aber T braucht nicht auf $\mathfrak{g}_u$ eindeutig zu sein, sondern erst auf einem *„Überlagerungsgebilde"*, das sich unverzweigt und unbegrenzt über $\mathfrak{g}_u$ hinzieht. Ich nenne ein Gebilde *einfach zusammenhängend*, wenn sich auf ihm jede geschlossene stetige Kurve stetig in einen Punkt zusammenziehen läßt. Das stärkste unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsgebilde (die „universelle Überlagerungsfläche", welche in der Uniformisierungstheorie eine so große Rolle spielt) über einem gegebenen Gebilde ist einfach zusammenhängend. Dieses universelle Überlagerungsgebilde $\mathfrak{g}_u^*$ über $\mathfrak{g}_u$ ist

st die wahre abstrakte Gruppe, um deren Darstellung es sich handelt; ist nur *eine* ihrer Darstellungen, und zwar eine verkürzte, nicht-homomorphe, wenn das Überlagerungsgebilde mehrblättrig ist. Für die Integrationsmethode kommt es darauf an, daß $\mathfrak{g}_u^*$ geschlossen ist, die Geschlossenheit von $\mathfrak{g}_u$ genügt nicht. Die einfachsten Beispiele lehren, daß wir hier keine Gespenster sehen. Man nehme die unitären Transformationen einer Variablen x:

$$x = \varepsilon \cdot x' \qquad (|\varepsilon| = 1).$$

Sie bilden den Einheitskreis in der komplexen ε-Ebene; erst der unendlich oft durchlaufene Kreis ist einfach zusammenhängend, das universelle Überlagerungsgebilde ist hier unendlichvielblättrig und nicht geschlossen. Es gibt darum auch unendlichvieldeutige Darstellungen, z. B. $y = \varepsilon^\gamma \cdot y'$, wo γ ein vorgegebener reeller, aber irrationaler Exponent ist. Ging man von der Gruppe der *reellen* Dilatationen aus

$$x = a \cdot x' \qquad (a > 0),$$

so führt die *eindeutige* Darstellung derselben $y = a^\gamma \cdot y'$, wenn wir gemäß der eingeschlagenen Methode durch die infinitesimalen Transformationen ins Komplexe übergehen und uns dann auf das unitäre Gebiet beschränken, zu jener unendlichvieldeutigen Darstellung der unitären Gruppe. Für die zugehörige infinitesimale Gruppe $dx = \lambda x$ ist z. B.

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{Vmatrix}$$

eine zweidimensionale reduzible, aber dennoch nicht zerfallende Darstellung. Betrachten wir aber nicht die Gruppe aller unitären Transformationen, sondern nur die der unitären Transformationen mit der Determinante 1, so gilt erfreulicherweise der

Satz 4. $\mathfrak{g}_u$ *ist einfach zusammenhängend.* (Darum führt jede Darstellung der infinitesimalen Gruppe zu einer eindeutigen Darstellung von ganz $\mathfrak{g}_u$.)

Beweis. Jede Matrix t von $\mathfrak{g}_u$ läßt sich in der Form[12])

$$t = u^{-1}(\varepsilon)u$$

schreiben, wo die Matrizen u und (ε) gleichfalls zu $\mathfrak{g}_u$ gehören und (ε) insbesondere eine Diagonalmatrix ist, die aus den Multiplikatoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ von t besteht; $|\varepsilon_i| = 1$. u kann, ohne daß t sich ändert, durch $(\varepsilon')u$ ersetzt werden, wo (ε') eine Matrix von derselben Natur wie (ε) ist. Ist

[12]) Es liegt wiederum an der Analysis situs, nämlich an der Geschlossenheit von $\mathfrak{g}_u$, daß hier die von der Elementarteilertheorie her bekannten Ausnahmefälle nicht eintreten.

aber z. B. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, so kann u sogar ersetzt werden durch $s \cdot u$, wo s in eine zweizeilige und $n-2$ einzeilige Matrizen zerfällt, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. s hängt von $n+2$, nicht bloß wie (ε') von $n-1$ Parametern ab. *Die „singulären" t*, d. s. diejenigen, deren Multiplikatoren nicht alle voneinander verschieden sind, *bilden mithin innerhalb der (n^2-1)-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{g}_u$ eine solche von drei Dimensionen weniger*! Man darf also voraussetzen, daß die geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{g}_u$, die in einen Punkt zusammengezogen werden soll, nicht durch die singulären Stellen hindurchgeht.

Ich führe die Drehwinkel φ_k des nicht-singulären t ein durch die Gleichungen

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \varphi_k} = e(\varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und markiere auf einer reellen φ-Achse die *sämtlichen* Winkelwerte φ_k. Sie bilden ein diskretes Punktsystem W, das sich periodisch mit der Periode 1 wiederholt. Wegen $\prod_i \varepsilon_i = 1$ ist die Summe von n aufeinander folgenden Punkten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dieses Systems eine ganze Zahl k. Indem ich von der „Repräsentantenfolge" $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ links φ_1 abhänge und dafür rechts $\varphi_1 + 1$ hinzufüge, gehe ich zu der „nächstfolgenden" Repräsentantenfolge über; deren Summe ist um 1 größer. Zu jeder ganzen Zahl k gibt es also eine und nur eine (die k-te) Repräsentantenfolge in W deren Summe $= k$ ist. Ich gehe aus von der 0-ten Repräsentantenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ desjenigen t, mit dem ich auf $\mathfrak{C}$ starte. Während nun die geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ durchläuft, verfolge ich die *stetige* Änderung von u und der Winkelwerte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ mit dem Kurvenparameter μ. Für diese Stetigkeit kann gesorgt werden, da $\mathfrak{C}$ die singulären Stellen vermeidet. Aus demselben Grunde findet ein gegenseitiges Überholen der Punkte φ_i auf der φ-Achse nicht statt. Sie bleiben also beständig den Ungleichungen

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < \varphi_1 + 1$$

wie auch der Gleichung

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 0$$

unterworfen. Am Schluß sind sie wieder in n aufeinanderfolgende Punkte des anfänglichen Systems W übergegangen; aber da die Summe 0 geblieben ist, liegt wieder die 0-te Repräsentantenfolge vor: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *kehren einzeln zu ihren Ausgangswerten zurück*, die korrespondierenden Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ auf dem Einheitskreis haben nur eine Pendelung, keine Umlaufung vollzogen[13]).

[13]) Lassen wir die Beschränkung: Determinante = 1 fort, so könnten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon$ ohne sich zu überholen, den Kreis umlaufen. Dabei beschriebe (ε) eine geschlossene Kurve, die sich gewiß nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Die Deformation der Kurve $\mathfrak{C}$ kann nun mittels eines von 1 bis 0 abnehmenden Deformationsparameters σ so vorgenommen werden, daß u von σ unabhängig bleibt, während die Funktionen $\varphi_i(\mu)$ durch $\sigma \cdot \varphi_i(\mu)$ ersetzt werden: dann zieht sich $\mathfrak{C}$ stetig auf den Einheitspunkt zusammen.

Nachdem so erkannt ist, daß T auf $\mathfrak{g}_u$ eindeutig ist, liefert das über die geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{g}_u$ zu erstreckende Integral (21) eine definite Hermitesche Form, die invariant ist gegenüber den Transformationen von $\mathfrak{G}_u$; und damit den

Satz 5. *Jede Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *zerfällt auf eindeutig bestimmte Weise in irreduzible Darstellungen; jede lineare Größe setzt sich aus voneinander unabhängigen einfachen Größen zusammen.*

Damit wird auch erst die am Schluß der vorigen Paragraphen angegebene Konstruktion auf sichere Füße gestellt.

§ 6.

Bestimmung der Charakteristiken und Dimensionszahlen.

Um die Charakteristiken der irreduziblen Darstellungen explizite zu bestimmen, müssen wir das Volumen desjenigen Stückes von $\mathfrak{g}_u$ berechnen, auf welchem die Transformationen t liegen, deren Drehwinkel im Spielraum $\varphi_i \dots \varphi_i + d\varphi_i$ sich befinden. Da die Drehwinkel die *Klasse* konjugierter Elemente kennzeichnen, zu welcher das Element t in $\mathfrak{g}_u$ gehört, drückt jenes Volumen aus, mit welcher Dichtigkeit die Elemente sich über die verschiedenen Klassen verteilen. Wir führen die Überlegung zunächst in der Gruppe u aller unitären Transformationen durch, wo sie etwas einfacher ausfällt.

Von allen unitären Transformationen, welche aus einer u dadurch hervorgehen, daß man sie vorne mit einer willkürlichen unitären Hauptmatrix (ε) multipliziert, will ich sagen, daß sie eine *Gerade* $[u]$ auf u bilden. Die zu u unendlich benachbarten Punkte auf der Geraden $[u + du]$ haben die Gestalt

$$(e + 2\pi i\, d\varphi)\,(u + du) = u + (2\pi i\, d\varphi \cdot u + du),$$

wo e die Einheitsmatrix, $i\, d\varphi$ eine infinitesimale Hauptmatrix mit lauter rein-imaginären Gliedern bedeutet. Der Vektor, welcher vom Punkte u zum Punkte $u + du$ hinführt, ist das infinitesimale Element $du \cdot u^{-1}$ von u. Die sämtlichen Vektoren, welche von u zu den unendlich benachbarten Punkten der Geraden $[u + du]$ hinüberführen, werden geliefert durch die Formel

$$du \cdot u^{-1} + 2\pi i\, d\varphi = \delta u.$$

Hier kann $d\varphi$ auf eine und nur eine Weise so bestimmt werden, daß in

δu die Hauptdiagonale mit lauter Nullen besetzt ist: diesen Vektor δu bezeichne ich als den *senkrechten* Übergang von der Geraden $[u]$ zur Geraden $[u + du]$ vom Punkte u aus. Vollzieht man den senkrechten Übergang von einer andern Stelle $(\varepsilon)u$ der Geraden $[u]$ aus, so erhält man statt δu den Vektor

$$(23) \qquad (\varepsilon)\,\delta u\,(\varepsilon)^{-1}.$$

Komme ich jetzt überein, alle Punkte von u, die auf einer Geraden liegen, durch „Projektion" in einen Punkt zusammenfallen zu lassen, so entsteht aus u eine Mannigfaltigkeit [u] von n Dimensionen weniger. Definiere ich ferner als Größe eines parallelepipedischen Volumelements mit der Ecke $[u]$ in ihr die Determinante aus den aufspannenden Vektoren δu, so geht aus (23) hervor, daß diese Volumgröße unabhängig davon ist, an welcher Stelle der Geraden $[u]$ ich das Volumelement konstruiere.

In der Transformation von t auf die Hauptmatrix (ε):

$$(24) \qquad t = u^{-1}(\varepsilon)u$$

kommt die Transformation u nur als Repräsentant der Geraden $[u]$ in Betracht. Gehe ich von t zu einem Nachbarpunkt $t + dt$ über, so bezeichne ich den verbindenden Vektor $dt \cdot t^{-1}$ mit δt; ferner setze ich $du \cdot u^{-1} = \delta' u$, und wenn φ_i die Drehwinkel von t sind, besteht in $d(\varepsilon)\cdot(\varepsilon)^{-1} = 2\pi\sqrt{-1}\,d\varphi$ die Hauptmatrix $d\varphi$ aus den infinitesimalen Zuwächsen $d\varphi_i$. Aus (24) oder

$$ut = (\varepsilon)u$$

folgt

$$du \cdot t + u \cdot dt = d(\varepsilon)\cdot u + (\varepsilon)\cdot du;$$

daraus durch hintere Zusammensetzung mit $t^{-1}u^{-1} = u^{-1}(\varepsilon)^{-1}$:

$$\delta' u + u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = 2\pi\sqrt{-1}\,d\varphi + (\varepsilon)\,\delta' u\,(\varepsilon)^{-1}$$

Die Gleichung

$$u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = \{(\varepsilon)\,\delta' u\,(\varepsilon)^{-1} - \delta' u\} + 2\pi\sqrt{-1}\,d\varphi$$

bleibt richtig, wenn man in der geschweiften Klammer rechts $\delta' u$ durch den Vektor δu ersetzt, der *senkrecht* zur benachbarten Geraden $[u + du]$ hinüberführt, in $\delta' u$ also die Glieder der Hauptdiagonale durch Nullen ersetzt. Wir haben demnach

$$(25) \qquad u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = \{(\varepsilon)\,\delta u\,(\varepsilon)^{-1} - \delta u\} + 2\pi\sqrt{-1}\,d\varphi.$$

Die rechts stehende Matrix hat die Komponenten

$$(26) \qquad \delta u_{ik}\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right) \quad (i \neq k), \qquad 2\pi\sqrt{-1}\,d\varphi_i \quad (i = k).$$

un vollzieht sich der Übergang von einer Matrix δt zu $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ durch ne *unimodulare* lineare Substitution der n^2 Komponenten von δt. Denn wohl der Übergang $\delta t \to u \cdot \delta t$ wie $\delta t \to \delta t \cdot u$ hat die Determinante $(\det u)^n$. Infolgedessen ist die Determinante aus n^2 Vektoren δt gleich er Determinante aus den dazu gehörigen Vektoren $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ mit den omponenten (26). Und die Größe $|dt|$ eines Volumelements, das von t der Mannigfaltigkeit u beschrieben wird, wenn $[u]$ in $[\mathfrak{u}]$ ein Volumlement von der Größe $|du|$ beschreibt und (ε) im Spielraum $\varphi_i \dots \varphi_i + d\varphi_i$ ariiert, ist[14])

$$= |du| \cdot \prod_{i \neq k} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right) \cdot d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n .$$

as Produkt ist

$$= \prod_{i<k} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right)\left(\frac{\bar{\varepsilon}_i}{\bar{\varepsilon}_k} - 1\right) = \left| \prod_{i<k} (\varepsilon_i - \varepsilon_k) \right|^2 .$$

ür das gesuchte Volumen findet sich so der Wert

$$d\Omega = \Delta \bar{\Delta}\, d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n , \tag{27}$$
$$\Delta = \prod_{i<k} (\varepsilon_i - \varepsilon_k), \qquad \varepsilon_i = e(\varphi_i),$$

orin ein konstanter Faktor, das Gesamtvolumen der geschlossenen Mannigltigkeit $[\mathfrak{u}]$, fortgelassen ist. Eine eindeutige Funktion $F(t)$ auf u, eren Wert nur von der Klasse des Arguments t abhängt, ist eine symetrische periodische Funktion der Drehwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Der Mittelert einer solchen Klassenfunktion auf u berechnet sich unserem Ergebnis ufolge durch die Formel

$$\frac{1}{\Omega} \int F(t)\, d\Omega, \qquad \Omega = \int d\Omega .$$

Schränken wir durch die Bedingung „Determinante $= 1$" die Gruppe u uf $\mathfrak{g}_u$ ein, so benutze man nur $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ als unabhängige Variable nd setze $\varphi_n = -(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1})$. Dann gilt im analogen Sinne

$$d\Omega = \Delta \bar{\Delta}\, d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-1} . \tag{28}$$

Der einzige Punkt, der erneuter Erwägung bedarf, ist der, daß auch jetzt och der Übergang von der willkürlichen Matrix δt mit der Spur 0 zu er Matrix $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$, welche gleichfalls die Spur 0 besitzt, eine *unimodulare* Substitution ist. Als unabhängige Komponenten von δt sind dabei twa außer den seitlichen δt_{ik} $(i \neq k)$ die Größen

$$\delta t_{22} - \delta t_{11}, \ \delta t_{33} - \delta t_{11}, \ \dots, \ \delta t_{nn} - \delta t_{11}$$

[14]) In der Tafel der unabhängigen *reellen* Komponenten von δt: $\frac{\delta t_{ii}}{2\pi\sqrt{-1}}$, Realnd Imaginärteil von δt_{ik} $(i<k)$, kann man die letzten beiden zweckmäßig ersetzen durch δt_{ik} und $\delta t_{ki} = -\overline{\delta t_{ik}}$.

zu benutzen. Dies aber ist klar, weil wir für eine völlig willkürliche Matrix δt als Komponenten die eben angegebenen und die Spur

$$\delta t_{11} + \delta t_{22} + \ldots + \delta t_{nn}$$

benutzen können, die letztere aber bei der in Rede stehenden Substitution ungeändert bleibt.

Genau wie für endliche Gruppen zeigt man, daß die Charakteristiken $\chi(t)$ der irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}_u$ den Orthogonalitätsrelationen genügen:

$$\int_{(\mathfrak{g}_u)} \chi(t)\,\chi'(t^{-1})\,|dt| = 0,$$

wenn χ, χ' zu zwei inäquivalenten Darstellungen gehören. Da χ eine Klassenfunktion ist, so können wir das Argument t durch seine Drehwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ersetzen und erhalten so

$$\int \chi(\varphi)\,\chi'(-\varphi)\,d\Omega = 0; \tag{29}$$

dazu die Gleichung

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi(\varphi)\,\chi(-\varphi)\,d\Omega = 1. \tag{29'}$$

Am einfachsten hat Herr I. Schur diese Orthogonalitätsrelationen bewiesen[15]; er hat auch im Falle der reellen Drehungsgruppe zuerst bemerkt, daß sie sich ins kontinuierliche Gebiet übertragen lassen. Sein Beweis stützt sich auf den algebraischen

Hilfssatz. *Sind T, T' zwei quadratische (Variable enthaltende) irreduzible Matrizen von N bzw. N' Zeilen, so kann eine konstante rechteckige Matrix A von N Spalten und N' Zeilen die Gleichung*

$$AT = T'A \tag{30}$$

nur so erfüllen, daß

entweder $N = N'$, $\det A \neq 0$, also T äquivalent T' gilt;

oder $A = 0$ ist.

Bedeutet T bzw. T' die allgemeine Matrix in zwei inäquivalenten irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{G}_u$, $\mathfrak{G}'_u$ von $\mathfrak{g}_u$, so folgt aus (30) demnach $A = 0$; aus

$$AT = TA$$

aber ergibt sich, daß A ein Multiplum der Einheitsmatrix sein muß. Ist X eine willkürliche Matrix von N Zeilen und N' Kolonnen, so erfüllt

$$A = \int_{(\mathfrak{g}_u)} T^{-1} X T'\,|dt|$$

---

[15]) Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsber. Berl. Akad. 1905, S. 406.

ie Beziehung (30). Darum ist, in Komponenten geschrieben,

$$\int T_{ij}(t^{-1})\, T'_{hk}(t)\, |dt| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, N \\ h, k = 1, 2, \ldots, N' \end{pmatrix}.$$

Nimmt man $i = j$, $h = k$ und summiert über i von 1 bis N, über k on 1 bis N', so kommt die Relation (29) zustande; analog (29′) mit Hilfe der Matrix

$$A = \int T^{-1} X T\, |dt|.$$

Es soll jetzt gezeigt werden, wie sich auf Grund der Orthogonalitätselationen die Charakteristiken vollständig berechnen lassen.

$\chi(\varphi)$ ist eine endliche symmetrische Fourierreihe in den n Winkelrgumenten. Setzt man, um den Orthogonalitätsbedingungen zu genügen, $\Delta \cdot \chi = \xi$, so wird ξ eine endliche schiefsymmetrische Fourierreihe. Eine olche ist eine lineare Kombination von Ausdrücken der folgenden Gestalt:

31) $$\sum \pm e(l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + \ldots + l_n \varphi_n).$$

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ sind abnehmend geordnete ganze Zahlen, wenn die letzte auf Grund der Nebenbedingung

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 0$$

leich 0 genommen wird:

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_n = 0.$$

Die Summe (31) ist alternierend zu erstrecken über alle $n!$ Permutationen er Argumente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Man kann jenen Ausdruck auch als Determinante schreiben:

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |e(l_1 \varphi), e(l_2 \varphi), \ldots, e(l_n \varphi)| = |\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|.$$

hre Zeilen werden aus der hingeschriebenen durch Anhängen der Indizes , 2, …, n an die Argumente φ bzw. ε gebildet. Nach der früher bolgten Rangordnung — an Stelle der λ_i sind jetzt durch die unitäre Beschränkung die rein imaginären Größen $2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_i$ getreten — ist das in (31) ingeschriebene Glied das höchste der ganzen Summe; es bestimmt die Höhe von ξ. Wir berechnen also durch Ausführung der Division die endliche symmetrische Fourierreihe

32) $$\chi^* = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\Delta}.$$

rgend zwei verschiedene dieser χ^* erfüllen dann die Orthogonalitätselation (29). Denn unter den $(n!)^2$ Gliedern des Produkts

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) \cdot \bar{\xi}(l'_1, l'_2, \ldots, l'_n)$$

ist keines $= 1$, und darum liefert jedes durch Integration nach $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ von 0 bis 1 den Wert 0. Ferner wird

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi^*(\varphi)\,\chi^*(-\varphi)\,d\Omega = \frac{n!}{\Omega}. \tag{33}$$

Δ ist selber eines der ξ, nämlich das niedrigste überhaupt mögliche:

$$\Delta = \xi(r_1, r_2, \ldots, r_n); \quad r_1 = n-1,\ r_2 = n-2, \ldots, r_n = 0. \tag{34}$$

Das höchste Glied in χ^* ist

$$e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n) = \varepsilon_1^{m_1}\varepsilon_2^{m_2}\ldots\varepsilon_n^{m_n};$$
$$m_i = l_i - r_i, \qquad m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n = 0. \tag{35}$$

Da für $l_i = r_i$ die Funktion $\chi^* = 1$ wird, muß der von den l unabhängige Wert des Integrals (33) $= 1$ sein, so daß $\Omega = n!$ ist und χ^* die in (29′) für χ verzeichnete Relation erfüllt. Es existiert aber zu vorgegebenem höchsten Gewicht

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n; \tag{36}$$

$$m_i \text{ ganze Zahlen}, \qquad m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n = 0, \tag{36′}$$

wie wir wissen, eine irreduzible Darstellung. Ihre Charakteristik χ_m muß sich additiv aus dem zu den gleichen m_i gehörigen $\chi^* = \chi_m^*$, Formel (32) und (35), und den χ^* von niedrigerer Höhe zusammensetzen. In Anbetracht des Umstandes aber, daß die χ^* den Orthogonalitätsrelationen genügen, wie wir gezeigt haben, und die Charakteristiken χ ihnen nach Schur genügen müssen, ergibt sich daraus sofort durch einen Induktionsschluß, der von den niedrigeren zu den höheren χ fortschreitet, $\chi_m = \pm\chi_m^*$. Das Vorzeichen ist dadurch bestimmt, daß alle Koeffizienten der Fourierreihe χ_m, insbesondere auch der Koeffizient des höchsten Gliedes, positive ganze Zahlen sein müssen (Multiplizitäten der vorkommenden Gewichte).

So kommen wir schließlich zu dem folgenden übersichtlichen Ergebnis:

$$\chi_m = \frac{|e(l_1\varphi),\ e(l_2\varphi),\ \ldots,\ e(l_n\varphi)|}{|e(r_1\varphi),\ e(r_2\varphi),\ \ldots,\ e(r_n\varphi)|} = \frac{|\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{n-2}, \ldots, \varepsilon^{0}|} \tag{37}$$

ist die Charakteristik der irreduziblen Darstellung vom höchsten Gewicht (36). Kehrt man von $\mathfrak{g}_n$ zur vollen Gruppe $\mathfrak{g}$ zurück, so bedeuten die ε_i nichts anderes als die Multiplikatoren des dargestellten Elements t von $\mathfrak{g}$; und der zweite Ausdruck in (37) liefert direkt die Charakteristik als Funktion jener Multiplikatoren. Das Cartansche Resultat, daß es zu vorgegebenem höchsten Gewicht nur *eine* irreduzible Darstellung gibt, ist damit auf neuem Wege bestätigt; und man erkennt zugleich den Zusammenhang zwischen der Normierung durch die Gleichung (29′) und durch den Cartanschen Satz, daß der Koeffizient des höchsten Gliedes in χ gleich 1 ist. Die zu-

ehörige Variablenzahl $N = N_m$ ist der Wert der Charakteristik für das Einheitselement von $\mathfrak{g}$, also für $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$. Man führt die echnung am bequemsten durch, indem man bemerkt, daß

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) \text{ durch die Substitution } \varphi_i = r_i \varphi$$

nd $$\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n) \quad " \quad " \quad " \quad \varphi_i = l_i \varphi$$

n dieselbe Funktion der einen Variablen φ übergehen. Wegen (34) ist lso für $\varphi_i = r_i \varphi$:

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_{(i<k)} (e(l_i \varphi) - e(l_k \varphi)),$$

nd für unendlich kleines φ:

$$\sim (2\pi\varphi\sqrt{-1})^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{i<k} (l_i - l_k).$$

)arum wird[16])

$$N = N_m = \frac{D(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{D(n-1, \ldots, 1, 0)}.$$

) bedeutet das Differenzenprodukt.

Schließlich kann man noch $\chi_m = \chi$ als symmetrische Funktion der Multiplikatoren von t ganz rational durch die Koeffizienten seines charakteristischen Polynoms

$$f(\zeta) = |e - \zeta t| = \prod_i (1 - \varepsilon_i \zeta)$$

usdrücken. Eine explizite Formel ergibt sich aus der Cauchyschen)eterminantenrelation

$$(38) \qquad \left| \frac{1}{1 - x_i y_k} \right| = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\prod_{i,k} (1 - x_i y_k)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Wählt man darin x_i gleich den Multiplikatoren von t und nimmt für y_k Variable ζ_k, so wird

$$\prod_{i,k} (1 - \varepsilon_i \zeta_k) = f(\zeta_1) f(\zeta_2) \ldots f(\zeta_n).$$

etzt man

$$(39) \qquad \frac{1}{f(\zeta)} = p_0 + p_1 \zeta + p_2 \zeta^2 + \ldots \qquad (p_0 = 1),$$

$$\frac{1}{1 - \varepsilon\zeta} = 1 + \varepsilon\zeta + \varepsilon^2 \zeta^2 + \ldots$$

nd entwickelt linke und rechte Seite der Cauchyschen Relation nach

[16]) Aus dieser Formel lassen sich mancherlei Aussagen über die niedrigsten vorkommenden Dimensionszahlen ableiten. Ich erwähne hier nur die wichtigste: Die Darstellungen mit niedrigster Variablenzahl außer der Identität sind $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_{n-1}$, d. i. die Gruppe $\mathfrak{g}$ selber und die kontragrediente; für sie ist $N = n$. Vgl. dazu A. Weinstein, Math. Zeitschr. 16 (1923), S. 78.

Potenzen der ζ, so liefert der Vergleich der Koeffizienten von $\zeta_1^{l_1}\zeta_2^{l_2}\dots\zeta_n^{l_n}$ den gewünschten Ausdruck:

Satz 6. *Die Charakteristik $\chi(t)$ der irreduziblen Darstellung mit dem höchsten Gewicht*

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n$$

berechnet sich aus

$$(40) \qquad \chi(t) = \frac{|\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \dots, \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}, \dots, \varepsilon^1, \varepsilon^0|} = |p_{l-n+1}, \dots, p_{l-1}, p_l|.$$

Dabei sind die m_i ganze Zahlen, die den Ungleichungen

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \dots \geqq m_n \geqq 0$$

genügen (auf die Normierung $m_n = 0$ kann man verzichten), *und es ist*

$$l_1 = m_1 + (n-1),\ l_2 = m_2 + (n-2),\ \dots,\ l_n = m_n$$

gesetzt. Die zugehörige Dimensionszahl beträgt

$$(41) \qquad N = \frac{D(l_1, l_2, \dots, l_n)}{D(n-1, \dots, 1, 0)}.$$

Die Determinante der p in (40) besteht aus n Zeilen, die dadurch aus der hingeschriebenen entstehen, daß l sukzessive durch $l_1, l_2, \dots, l_n$ ersetzt wird; die p mit negativem Index sind $= 0$ zu nehmen. — Diese Formeln sind von Herrn I. Schur in seiner Dissertation bereits auf anderem Wege gewonnen worden.

§ 7.

Zusammenhang mit der symmetrischen Gruppe und ihren Charakteren.

Auf einen Tensor ν-ter Stufe f kann man einen Operator

$$\boldsymbol{a} = \sum_P \alpha_{P^{-1}} P$$

anwenden, wie er schon in der Konstruktion am Schluß von § 4 auftrat:

$$(42) \qquad f^* = f\boldsymbol{a} = \sum_P \alpha_{P^{-1}} fP.$$

P durchläuft die $\nu!$ Permutationen der Gruppe $\Sigma_\nu = \Sigma$. Der Operator $\boldsymbol{a}$ oder das System seiner Komponenten α_P wird als eine zu Σ gehörige *Gruppenzahl* bezeichnet. Gruppenzahlen miteinander multiplizieren, heißt die Operatoren hintereinander ausführen:

$$f\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_Q \sum_P \beta_{Q^{-1}} \alpha_{P^{-1}} fPQ.$$

Das Produkt

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \sum_P \gamma_{P^{-1}} P$$

berechnet sich also nach der Formel

$$\gamma_R{}^{-1} = \sum_{PQ=R} \alpha_P{}^{-1} \beta_Q{}^{-1} \quad \text{oder} \quad \gamma_R = \sum_{QP=R} \alpha_P \beta_Q .$$

Faßt man auch das System der Größen fP und f^*P je als eine Gruppenzahl f bzw. f^* auf, so schreibt sich die Gleichung (42):

$$f^* = f \cdot a .$$

Eine beliebige Symmetriebedingung für den Tensor f lautet in dieser Symbolik:

$$f \cdot a = 0 ,$$

wo a eine feste Gruppenzahl ist. Ich bewies in der oben zitierten Rendiconti-Note, daß man mehrere Symmetriebedingungen immer durch eine einzige ersetzen kann, und daß man den allgemeinsten Tensor f^* einer vorgegebenen Symmetrieklasse aus dem willkürlichen Tensor f der ν-ten Stufe durch einen Operator c der hier betrachteten Art gewinnt:

(43) $$f^* = f \cdot c ,$$

welcher die folgende Eigentümlichkeit besitzt: Wendet man ihn auf einen bereits zur Symmetrieklasse gehörigen Tensor f^* an, so reproduziert er f^*; es ist nämlich

(44) $$c \cdot c = c ,$$

oder c ist in der Terminologie von Frobenius eine *charakteristische Einheit*. Zu jeder charakteristischen Einheit c gehört eine Darstellung Δ_c der endlichen Gruppe $\Sigma_\nu = \Sigma$. Man ordne nämlich der Gruppenzahl s die lineare Transformation S:

(45) $$x = s x' c$$

in der $\nu!$-dimensionalen Mannigfaltigkeit aller Gruppenzahlen x zu. Läßt man ihr die zu s' gehörige Transformation S' folgen:

$$x' = s' x'' c ,$$

so ergibt sich insgesamt wegen (44):

$$x = (s s') x'' c .$$

Die Transformation SS' gehört also zu dem Produkt $s \cdot s'$. Andererseits gehört zu c auch eine bestimmte Symmetrieklasse (f_c) von Tensoren f^*, Formel (43), und damit nach § 1 eine Darstellung $\mathfrak{G}_c$ der kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{g}$, welche angibt, wie sich die Tensoren jener Symmetrieklasse unter dem Einfluß von $\mathfrak{g}$ untereinander transformieren. Die charakteristische Einheit c, die Tensorklasse (f_c) heißt *primitiv*, wenn die Darstellung Δ_c von Σ irreduzibel ist. Dies bedeutet, daß jede weitere

hinzugefügte Symmetrieforderung dem willkürlichen Tensor der Klasse (f_e) nur noch die Wertmöglichkeit 0 offen läßt. Andernfalls läßt sich c aus primitiven charakteristischen Einheiten zusammensetzen: $c = c_1 + c_2 + \ldots$, von denen je zwei das Produkt 0 ergeben; die Tensoren der Klasse (f_e) lassen sich in unabhängige Bestandteile zerspalten, deren jeder frei in einer primitiven Symmetrieklasse variiert.

Eine Tensorklasse ist gewiß dann primitiv, wenn die zugehörige Darstellung von $\mathfrak{g}$ irreduzibel ist. Die am Schluß von § 4 durch die Formel (20) konstruierte Tensorklasse ist demnach primitiv. Ist der dort auftretende, mit Hilfe eines Schemas $\{m\}$ für die Ziffern von 1 bis r definierte Operator

$$e = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} P$$

eine charakteristische Einheit? Im wesentlichen ja. Es gilt zwar nicht die Gleichung (44); aber, wie man sich leicht zurechtlegt und wie es formal am elegantesten in Fr. II, S. 355 bewiesen ist (dort ist $\varepsilon_{P^{-1}}$ mit $\zeta(P)$ bezeichnet), gilt eine Gleichung

$$e \cdot e = \varrho e, \quad \text{oder in Komponenten:} \quad \sum_Q \varepsilon_{PQ^{-1}} \varepsilon_Q = \varrho \cdot \varepsilon_P.$$

Daß

$$\varrho = \sum_Q \varepsilon_{Q^{-1}} \varepsilon_Q$$

verschieden von Null und zwar positiv ist, sieht man am besten so ein. Die lineare Abbildung E:

$$x = x' e$$

genügt der Gleichung $E \cdot E = \varrho E$, und infolgedessen ist

$$\text{Spur } (E) = \varrho \cdot \text{Rang } (E).$$

Die Spur aber ist $= r! \varepsilon_J = r!$, wo J die identische Permutation bedeutet; also

$$\varrho = \frac{r!}{\text{Rang } (E)}.$$

$\frac{1}{\varrho} e$ ist mithin eine charakteristische Einheit, und zwar eine primitive. Damit *alle* Schemata $\{m\}$ zu primitiven Tensorklassen führen, braucht man nur vorauszusetzen, daß die Dimensionszahl $n \geqq r$ sei; dann sind für einen willkürlichen Tensor r-ter Stufe f die $r!$ Größen fP voneinander linear unabhängig. Die aus den verschiedenen Schemata entspringenden Einheiten $\frac{1}{\varrho} e$ führen zu lauter *inäquivalenten* irreduziblen Darstellungen Δ_e der symmetrischen Gruppe Σ; denn wären zwei dieser Einheiten äquivalent, so müßten auch die zugehörigen Darstellungen der kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{g}$ äquivalent sein. Die Anzahl verschiedener Schemata ist aber ebenso groß wie die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente in Σ.

welch letztere durch die verschiedenen Möglichkeiten des Zerfalls einer Permutation in Zyklen gegeben wird. Darum finden wir so *ein volles System inäquivalenter primitiver charakteristischer Einheiten* und damit alle irreduziblen Darstellungen von Σ. Zugleich ist dadurch sichergestellt, daß *jede* primitive charakteristische Einheit e eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{H}_e$ von $\mathfrak{g}$ liefert, jede primitive Tensorklasse eine einfache Größe repräsentiert. Diese Erzeugung der Einheiten rührt von A. Young und Frobenius (Fr. II) her. Hier sei noch das Folgende hinzugefügt. Die zu einer charakteristischen Einheit c gehörige Darstellung Δ_c von Σ möge, vollständig reduziert, die verschiedenen inäquivalenten irreduziblen Darstellungen der Gruppe Σ von den Graden $g, g', \ldots$ — deren jede einem Schema $\{m\}$ korrespondiert — bzw. $r, r', \ldots$ -mal enthalten. Zwei solche Einheiten sind als äquivalent zu betrachten, wenn sie in den Anzahlen $r, r', \ldots$ übereinstimmen. Es ist klar, daß zu äquivalenten c äquivalente Darstellungen $\mathfrak{G}_c$ von $\mathfrak{g}$ gehören; aber wir können jetzt hinzufügen, daß die Äquivalenz der c auch notwendig ist zur Äquivalenz der $\mathfrak{G}_c$. Mit einer Einschränkung: wenn $n < \nu$, hat man *die* Zahlen $r, r', \ldots$ fortzulassen, welche jenen Schemata korrespondieren, in denen Vertikalstollen von einer Länge $> n$ vorkommen; denn diese liefern nach (20) nur $f^* = 0$. Außerdem ergeben zwei Schemata, die zu verschiedenen ν gehören, äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{g}$ (nicht von der Gruppe $\tilde{\mathfrak{g}}$ aller linearen Transformationen) allemal dann, wenn die Zeilenlängen des einen Schema $n_1, m_2, \ldots, m_n$ durch Addition einer und derselben ganzen positiven Zahl aus den Zeilenlängen des andern hervorgehen.

In dem dargestellten Zusammenhang bietet sich die Young-Frobeniussche Erzeugung der Gruppencharaktere von Σ ganz von selber dar. Den Nachweis dafür, daß die zu einem Schema $\{m\}$ gehörige und am Schluß von § 4 konstruierte Gruppenzahl

$$e = \sum_P \varepsilon_{P^{-1}} P$$

oder vielmehr $\frac{1}{\varrho} e$ eine *primitive* charakteristische Einheit ist, wird man aber gerne, statt auf unserem Umwege mit transzendenten Hilfsmitteln, direkt erbringen wollen. Die Spur der Transformation S (45) ist, wenn

$$c = \sum_P \gamma_{P^{-1}} P, \qquad s = \sum_P \sigma_{P^{-1}} P$$

gesetzt wird, gleich

$$\sum_{P,R} \gamma_{R^{-1}P^{-1}R} \cdot \sigma_P .$$

Die Charaktere der Darstellung Δ_c von Σ sind also

$$\chi^*(P) = \sum_R \gamma_{R^{-1}PR} .$$

Sie sind Kombinationen der primitiven Charaktere $\chi(P), \chi'(P), \ldots$:

$$\chi^*(P) = r\chi(P) + r'\chi'(P) + \ldots .$$

Daraus folgt auf Grund der Orthogonalitätsrelationen für die primitiven Charaktere von Σ:

$$\frac{1}{\nu!}\sum_P \chi^*(P^{-1})\chi^*(P) = r^2 + r'^2 + \ldots$$

oder

$$\sum_{P,R} \gamma_{R^{-1}PR}\gamma_{P^{-1}} = r^2 + r'^2 + \ldots . \tag{46}$$

Der Charakter χ^* ist demnach dann und nur dann primitiv, wenn die Summe (46) gleich 1 ist. Es kommt also darauf an, zu zeigen, daß

$$\sum_{P,R} \varepsilon_{R^{-1}PR}\varepsilon_{P^{-1}} = \varrho^2 = \left(\sum_P \varepsilon_P \varepsilon_{P^{-1}}\right)^2$$

wird. Das geschieht in Fr. II, S. 351 unten und S. 352 oben, auf wenigen Zeilen [17]).

Satz 7. *Die Formeln*

$$\varrho = \frac{\nu!}{g}, \qquad \varrho\cdot\chi(P) = \sum_R \varepsilon_{R^{-1}PR} \tag{48}$$

liefern uns die primitiven Charaktere $\chi(P)$ der symmetrischen Gruppe Σ_ν und die zugehörigen Gradzahlen g. Setzt man für einen beliebigen Tensor ν-ter Stufe f:

$$\sum_P \chi(P^{-1})fP = f_\chi ,$$

so gilt wegen

$$g\chi(P) + g'\chi'(P) + \ldots = \begin{cases} \nu! & \text{für } P = J \\ 0 & \text{für } P \neq J \end{cases}$$

die Youngsche Reihenentwicklung

$$\nu!\cdot f = g\cdot f_\chi + g'\cdot f_{\chi'} + \ldots .$$

---

[17]) Nach J. A. Schouten (a. a. O., S. 255) läßt diese Erzeugung erkennen, daß die Gradzahl g gleich ist der Anzahl von Möglichkeiten, wie man die Ziffern von 1 bis ν in solcher Weise über die Fächer des Schemas $\{m\}$ verteilen kann, daß sie in jeder Zeile und jeder Kolonne ihrer Größe nach aufeinander folgen. Das kommt hinaus auf die schon von I. Schur, Sitzungsber. Berl. Akad. 1908, S. 606 angegebene Rekursionsformel

$$g_{m_1, m_2, \ldots} = g_{m_1-1, m_2, \ldots} + g_{m_1, m_2-1, \ldots} + \ldots , \tag{47}$$

wo ein $g = 0$ zu setzen ist, wenn die Indizes nicht die vorgeschriebene Größenanordnung befolgen. Herr Schouten führte ferner die Zerlegung der Zahl $\sum_P \chi(P^{-1})P$ in g primitive charakteristische Einheiten konstruktiv durch.

Die Erzeugung der irreduziblen Darstellungen von Σ_ν hängt nach em Vorhergehenden aufs engste zusammen mit der durch die infinitesi- iale Methode der §§ 2 bis 4 beherrschten Erzeugung der irreduziblen arstellungen von $\mathfrak{g}$. Ebenso hängen nun auch die expliziten Formeln ir die Charaktere und Grade der ersteren eng zusammen mit den in § 6 ntwickelten Formeln für die Charakteristiken und Dimensionszahlen der tzteren. Zur Unterscheidung verwenden wir das kleine χ zur Bezeich- ung der Charaktere von Σ_ν, anders als in § 6 aber das große X für die harakteristiken von $\mathfrak{g}$. Ist $\boldsymbol{c}$ eine charakteristische Einheit, so gehört azu einerseits die Darstellung Δ_c von Σ_ν mit den Charakteren $\chi(P)$, ndererseits eine Darstellung $\mathfrak{G}_c$ von $\mathfrak{g}$ mit der Charakteristik $\mathsf{X}(t)$:

$$\mathsf{X}(t) = \sum r_{k_1 k_2 \dots k_n} \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_n^{k_n}.$$

n allen Gliedern der Summe ist

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = \nu.$$

ine Tensorkomponente $f_{ikl\dots}$ multipliziert sich unter dem Einfluß der Haupttransformation

$$x_i = \varepsilon_i x_i' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

m Raume $\mathfrak{r}$ mit dem Faktor $\varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l \dots$, also dann und nur dann mit $\varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_n^{k_n}$, wenn k_1 ihrer Indizes $= 1$, k_2 der Indizes $= 2, \dots, k_n$ der In- izes $= n$ sind. Die Multiplizität $r_{k_1 k_2 \dots k_n}$ des Gewichtes $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \dots + k_n\lambda_n$ st demnach die Anzahl der linear unabhängigen unter den Komponenten on $\boldsymbol{f \cdot c}$, wenn ich unter $\boldsymbol{f}$ die Gruppenzahl mit den Komponenten

$$f_{11\dots 22\dots n\, P}$$

erstehe. Die Permutationen P sind auf die Indizes auszuüben, von denen ie ersten k_1 gleich 1, die nächsten k_2 gleich 2, ..., die letzten k_n gleich n ind. Verstehe ich unter $\Sigma_{k_1 k_2 \dots k_n}$ die Gruppe aller Permutationen, welche ie ersten k_1 Ziffern untereinander vertauschen, ebenso die darauf fol- enden k_2, ..., schließlich die letzten k_n, so heißt das: $r_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ist die nzahl der unabhängigen Komponenten von $\boldsymbol{y \cdot c}$, wenn $\boldsymbol{y}$ alle Gruppen- ahlen durchläuft, deren Komponenten η der Bedingung genügen: $\eta_P = \eta_{PA}$, wo A eine beliebige Permutation aus $\Sigma_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ist. Hier üssen wir uns nun stützen auf folgenden

Hilfssatz. *A sei eine Untergruppe von Σ_ν der Ordnung h, und y durchlaufe alle Gruppenzahlen mit der Eigenschaft: $\eta_P = \eta_Q$, wenn $P^{-1}Q$ zu A gehört. Die Anzahl der linear unabhängigen Komponenten von $y \cdot c$ ist dann gleich*

(49) $$\frac{1}{h} \cdot \sum_{\mathsf{A}} \chi(P).$$

Die Summe erstreckt sich über alle Permutationen P in A.

Beweis. Die Gruppenzahl

$$a = \sum_P \alpha_{P^{-1}} P$$

habe die Komponenten

$$\alpha_P = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{wenn } P \text{ zu A gehört,} \\ 0, & \text{wenn } P \text{ nicht zu A gehört.} \end{cases}$$

Dann ist

$$a \cdot a = a.$$

Die allgemeinste Gruppenzahl y von dem im Hilfssatz genannten Typus entspringt aus einer völlig willkürlichen Gruppenzahl x' durch die Gleichung

$$y = a \cdot x'.$$

Zu bestimmen ist demnach der Rang der Transformation A:

$$x = a \cdot x' \cdot c.$$

Diese genügt der Gleichung $A \cdot A = A$. Ihr Rang ist folglich gleich ihrer Spur. A ist aber nichts anderes als die Transformation, welche der Gruppenzahl a in der Darstellung Δ_c korrespondiert, jene Spur also

$$= \sum \chi(P^{-1}) \alpha_P;$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Darum ist

$$r_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1! \, k_2! \ldots k_n!} \cdot \sum_{\mathsf{A}} \chi(P) \quad \text{für } \mathsf{A} = \Sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

$\mathfrak{K}$ sei eine Klasse konjugierter Elemente in Σ_ν; nämlich diejenige, deren Permutationen aus i_1 Zyklen der Ordnung 1, i_2 Zyklen der Ordnung 2, .. bestehen,

$$1 i_1 + 2 i_2 + \ldots = \nu,$$

und $c_{k_1 k_2 \ldots k_n}(\mathfrak{K})$ die Anzahl der in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Permutationen von $\Sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Wir bekommen die Formel

$$\mathsf{X} = \sum_{\mathfrak{K}} \left\{ \chi(\mathfrak{K}) \sum_{(k)} \frac{c_{k_1 k_2 \ldots k_n}(\mathfrak{K})}{k_1! \, k_2! \ldots k_n!} \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \ldots \varepsilon_n^{k_n} \right\}.$$

Für die innere Summe liefert eine elementare Betrachtung den Ausdruck

$$\frac{1}{i_1! \, i_2! \ldots} \cdot \left(\frac{\sigma_1}{1}\right)^{i_1} \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^{i_2} \ldots,$$

wo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ die sukzessiven Potenzsummen der Variablen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ bedeuten. Schreiben wir $\chi(i_1, i_2, \ldots)$ an Stelle von $\chi(\mathfrak{K})$, so haben wir schließlich[18])

[18]) Vgl. I. Schur, Dissertation, S. 31, Formel (24).

Satz 8. *Die Charaktere χ der zu einer charakteristischen Einheit c hörigen Darstellung Δ_ν von Σ_ν und die Charakteristik* X *der korrespon- erenden Darstellung $\mathfrak{G}_\nu$ von* g *stehen in der Beziehung zueinander:*

$$0) \qquad X = \sum_{(1i_1+2i_2+\ldots=\nu)} \frac{\chi(i_1, i_2, \ldots)}{i_1!\, i_2! \ldots} \left(\frac{\sigma_1}{1}\right)^{i_1} \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^{i_2} \cdots.$$

Wenden wir diese Formel insbesondere auf die primitive Charakteristik 0) an, so liefert sie uns die primitiven Charaktere der symmetrischen ruppe Σ_ν; wir haben nur die einfach gebaute symmetrische Funktion X r Argumente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ durch ihre Potenzsummen auszudrücken. Jede reduzible Darstellung Δ_ϱ von Σ_ν, die mit einer irreduziblen Darstellung $_\varrho$ von g (bzw. $\tilde{\mathfrak{g}}$) der Ordnung ν verknüpft ist, entspricht einem Schema $n\}$, d. h. einem System ganzer Zahlen $m_1, m_2, \ldots$, für die

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq 0, \quad m_1 + m_2 + \ldots = \nu$$

lt. Das zugehörige X_m ist $= 0$ zu setzen, wenn Vertikalstollen von ößerer Länge als n vorkommen, d. i. wenn m_{n+1} noch > 0 ist. Schreibt an die allen Schemata $\{m\}$ korrespondierenden Gleichungen (50: hin, ultipliziert die zum Zahlensystem $\{m\}$ gehörige mit χ_m, so kommt

$$1) \qquad \sigma_1^{i_1} \sigma_2^{i_2} \ldots = \sum_{(m_1, m_2 \ldots)} \chi_m \cdot X_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \sum_{(m_1, \ldots, m_n)} \chi_m \frac{|\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}|}{D(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)}.$$

Satz 9. *Die Charaktere $\chi_m = \chi_m(i_1, i_2, \ldots)$ von Σ_ν sind die Koef- zienten der Entwicklung von*

$$\sigma_1^{i_1} \sigma_2^{i_2} \ldots D(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

ich Potenzen der Variablen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Will man so alle primitiven haraktere von Σ_ν gewinnen, so muß die Dimensionszahl $n \geqq \nu$ gewählt erden.

Das ist das Hauptresultat in Fr. I (Frobenius hat statt n, ν die ezeichnungen m, n). Dort wundert man sich, wieso neben der Anzahl ν r Permutationsziffern noch eine andere Anzahl n im Ansatz vorkommt. ufgeklärt wird der Sachverhalt, glaube ich, erst durch die Beziehung zur ruppe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n)}$; was dort ein genialer Kunstgriff ist, erscheint hier ganz türlich — wennschon freilich die Schlußweise von Frobenius immer r rascheste Weg bleibt, seine Ergebnisse zu verifizieren.

$\chi(\nu, 0, 0, \ldots, 0)$ ist der Grad g des Charakters χ. Aus (51) folgt sbesondere

$$2) \qquad \sigma_1^\nu = \sum_{(m)} g_m X_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n).$$

ist die Charakteristik der Darstellung $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{g}$, σ_1^ν also die des

Hurwitzschen Produkts $\mathfrak{g}^\nu$. Die Formel (52) lehrt, daß die Darstellung $\mathfrak{g}^\nu$, vollständig reduziert, jede irreduzible Darstellung der Ordnung ν enthält, und zwar so oft, wie die zugehörige Charakteren-Gradzahl g angibt. Es ist damit nicht nur die Reduktion von $\mathfrak{g}^\nu$ geleistet, sondern diese Gleichung (52) — oder auch die Gleichung (50) — führt andererseits dazu, die Gradzahlen g der irreduziblen Darstellungen von Σ_ν explizite auszurechnen[19]).

Satz 10. *$\mathfrak{g}^\nu$ liefert, vollständig reduziert, jede irreduzible Darstellung der Ordnung ν von $\mathfrak{g}$ so oft, wie der Grad g der zugehörigen irreduziblen Darstellung der symmetrischen Gruppe Σ_ν angibt. Es gilt*

$$g = g_m = \frac{\nu!\, D(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{l_1!\, l_2! \ldots l_n!}. \tag{53}$$

(Man wolle die Gradformel mit der analogen (41) für die kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{g}$ konfrontieren!)

§ 8.

Die Gruppe aller linearen Transformationen.

Hat man einmal einen vollen Überblick über die möglichen Darstellungen der (reellen oder komplexen) Gruppe $\mathfrak{g}$ aller linearen Transformationen von der Determinante 1 gewonnen, so ist es leicht möglich, auch die Gruppe $\tilde{\mathfrak{g}}$ *aller* linearen Transformationen (mit einer von 0 verschiedenen bzw. positiven Determinante) zu behandeln. Denn jede Darstellung $\tilde{\mathfrak{G}}$ von $\tilde{\mathfrak{g}}$ involviert eine solche $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{g}$. Ist diese irreduzibel, so müssen den Dilatationen von $\tilde{\mathfrak{g}}$ Transformationen A in $\tilde{\mathfrak{G}}$ entsprechen, welche mit allen Matrizen T vertauschbar sind. Und daraus folgt nach dem Hilfssatz von Schur auf S. 296, daß A ein Multiplum der Einheitsmatrix ist. Insbesondere korrespondiert der infinitesimalen Dilatation

$$dx_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{in } \mathfrak{r} \text{ eine inf. Dilatation} \qquad dy_k = \gamma \cdot y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \qquad \text{in } \mathfrak{R}. \tag{54}$$

Die darstellende Matrix von t ist dann in $\tilde{\mathfrak{G}}$ nicht die Matrix ν-ter Ordnung T, sondern

$$(\det t)^{\gamma - \frac{\nu}{n}} \cdot T.$$

An Stelle des Begriffes Tensor hat der der *Tensordichte* zu treten; jedoch in dem allgemeinen Sinne, daß bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem in $\mathfrak{r}$ Multiplikation mit einer *beliebigen* Potenz der Transformations-

[19]) Fr. I, S. 522. — Aus (50) und der Darstellung (40) von X durch eine p-Determinante gewinnt man ferner leicht die Rekursionsformel (47); so leitet sie I. Schur a. a. O. ab.

eterminante stattfindet, deren Exponent nicht gerade $= 1$, überhaupt icht ganzzahlig zu sein braucht.

Ist $\mathfrak{G}$ nicht irreduzibel, sondern zerfällt, vollständig reduziert, z. B. $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ ($N = 2N_1 + N_2$, $\mathfrak{G}_2$ nicht äquivalent $\mathfrak{G}_1$), so daß die llgemeine Matrix von $\mathfrak{G}$ die Gestalt hat

$$\left\| \begin{matrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 \end{matrix} \right\|,$$

o muß nach dem eben herangezogenen Hilfssatz die Matrix in $\tilde{\mathfrak{G}}$, welche iner Dilatation in $\tilde{\mathfrak{g}}$, insbesondere der infinitesimalen Dilatation (54) kor- espondiert, die Gestalt besitzen

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_{11} E_1, & \gamma_{12} E_1, & 0 \\ \gamma_{21} E_1, & \gamma_{22} E_1, & 0 \\ 0, & 0, & \gamma E_2 \end{matrix} \right\|.$$

Die γ sind Zahlen, E_1 und E_2 aber die Einheitsmatrizen von N_1 bzw. N_2 Dimensionen. „Im allgemeinen" kann man hier wohl dafür sorgen, daß ie zweireihige Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{matrix} \right\| \quad \text{die Normalform} \quad \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|$$

nnimmt, und dann ist auch $\tilde{\mathfrak{G}}$ vollreduzibel. Aber es können die aus der Elementarteilertheorie bekannten Ausnahmefälle eintreten; *für* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *ist demach der Satz von der vollen Reduzibilität der Darstellungen nicht mehr ausnahmslos gültig.*

(Eingegangen am 21. Januar 1925.)

Ergänzungen zu der Abhandlung: „Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze“[1]).

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Es sei mir gestattet, meiner in dem Titel genannten Abhandlung einige Bemerkungen hinzuzufügen.

1. Auf S. 112 findet sich das Ergebnis, die Beschleunigungskomponenten verhalten sich im Unendlichen wie $O(R^{-2})$ (vgl. die Formel (51_*)). Es ist leicht zu sehen, daß sogar

$$\left|\frac{du}{dt}\right|, \left|\frac{dv}{dt}\right|, \left|\frac{dw}{dt}\right| \leqq \bar{\bar{\alpha}} R^{-3} \tag{1}$$

gesetzt werden kann. In der Tat ist beispielsweise (vgl. die Formel (51^*) auf S. 112)

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} = &-\frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\right)\zeta'\,d\tau' \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\eta'}{dt}\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\zeta'}{dt}\,d\tau'.\end{aligned} \tag{2}$$

Die Integralausdrücke in der ersten Zeile verhalten sich wie $O(R^{-3})$, da dies für $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}$ und $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}$ gilt (vgl. die Fußnote [24])). Es ist nun weiter

$$\begin{aligned}\int_T \frac{d\eta'}{dt}\,d\tau' &= \int_{T_0} \frac{d\eta'}{dt}\,da'\,db'\,dc' = \int_{T_0}\left(\xi_0'\frac{\partial v'}{\partial a'} + \eta_0'\frac{\partial v'}{\partial b'} + \zeta_0'\frac{\partial v'}{\partial c'}\right)da'\,db'\,dc' \\ &= \int_{T_0}\left\{\frac{\partial}{\partial a'}(\xi_0' v') + \frac{\partial}{\partial b'}(\eta_0' v') + \frac{\partial}{\partial c'}(\zeta_0' v') - v'\left(\frac{\partial \xi_0'}{\partial a'} + \frac{\partial \eta_0'}{\partial b'} + \frac{\partial \zeta_0'}{\partial c'}\right)\right\}da'\,db' \\ &= -\int_{S_0} v'(\xi_0'\cos\alpha' + \eta_0'\cos\beta' + \zeta_0'\cos\gamma')\,d\sigma',\end{aligned} \tag{3}$$

[1]) Diese Zeitschrift **23** (1925), S. 89–154.

unter α', β', γ' die von der Innennormale zu S_0 mit den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel verstanden. Da auf S_0 die Normalkomponente des Vektors ξ_0, η_0, ζ_0 verschwindet, so ist also $\int_T \frac{d\eta'}{dt}\, d\tau' = 0$. Hieraus folgt aber nach bekannten Sätzen, daß sich $\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\frac{d\eta'}{dt}\, d\tau'$ für $R \to \infty$ wie $O(R^{-3})$ verhält. Das gleiche läßt sich bezüglich $\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\frac{d\zeta'}{dt}\, d\tau'$ sagen. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

2. In dem § 5 des ersten Kapitels wird ein Existenzproblem bei Abwesenheit des Kräftepotentials behandelt. Wir wollen gewisse a. a. O. nur angedeutete Überlegungen mit einigen Einzelheiten durchführen, der Übersichtlichkeit halber aber die Voraussetzungen so wählen, daß, wie in den §§ 1—4, von der speziellen Berücksichtigung des unendlich fernen Punktes abgesehen werden kann. Wir gehen von den folgenden Annahmen aus:

Die Einheitskräfte X, Y, Z, die nicht notwendig von einem Potential herrühren und übrigens auch von der Zeit abhängen können, sind nebst ihren partiellen Ableitungen der vier ersten Ordnungen stetig. Sie verhalten sich im Unendlichen wie $O(R^{-2})$. Außerhalb einer geschlossenen Fläche $\overset{+}{S}$, die sich, was ihren topologischen und Stetigkeitscharakter betrifft, wie die in § 1 mit S_0 bezeichnete Fläche verhält, ist $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Der von $\overset{+}{S}$ begrenzte endliche Bereich heiße $\overset{+}{T}$. Es sei T_0 ein ganz im Innern von $\overset{+}{T}$ befindlicher Bereich, der sich vollkommen wie der in § 1 ebenso bezeichnete Bereich verhält[2]). Die Geschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0 zur Zeit t_0 sind überall stetig und haben überall im Endlichen stetige oder zumindest abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. In dem zu T_0 komplementären Raume ist $\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y}$. Auf der Berandung S_0 von T_0 fällt der Vektor ξ_0, η_0, ζ_0 allemal in die Tangentialebene hinein. Im Gegensatz zu den Annahmen der §§ 1—4 gibt es in T_0 eine, was ihre Stetigkeitseigenschaften betrifft, wie S_0 beschaffene Fläche $\underline{S}_0$, auf der $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial z}$ sprungweise Änderungen erleiden können (auf S. 124—125 ist diese Fläche mit S_0 bezeichnet worden). Da nur die

[2]) Der Bereich $\overset{+}{T}$ liegt im Raume x, y, z und ist im allgemeinen von t abhängig. Wir nehmen an, daß zur Zeit t_0, wo die beiden Räume a, b, c und x, y, z koinzidieren, $\overset{+}{T}$ den Bereich T_0 ganz in seinem Innern enthält. Aus Gründen der Stetigkeit wird $\overset{+}{T}$ für alle hinreichend kleinen Werte von $t - t_0$ den Bereich T, das Bild von t_0, in seinem Innern enthalten.

Normalableitungen von u_0, v_0, w_0 von der Unstetigkeit betroffen sind, so geht die Normalkomponente des Wirbelvektors durch S_0 stetig durch. Es sei schließlich angenommen, daß in jedem Stetigkeitsbereich der partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}$ in T_0 $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}$ der H-Bedingung genügen.

Wir gehen von den Friedmannschen Formeln (vgl. die Formeln (84) auf S. 123)

$$(4)\quad \begin{aligned} \xi &= (\xi_0+\xi^*)\frac{\partial x}{\partial a}+(\eta_0+\eta^*)\frac{\partial x}{\partial b}+(\zeta_0+\zeta^*)\frac{\partial x}{\partial c} = \xi_0\frac{\partial x}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial x}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial x}{\partial c},\\ \eta &= (\xi_0+\xi^*)\frac{\partial y}{\partial a}+(\eta_0+\eta^*)\frac{\partial y}{\partial b}+(\zeta_0+\zeta^*)\frac{\partial y}{\partial c} = \xi_0\frac{\partial y}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial y}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial y}{\partial c},\\ \zeta &= (\xi_0+\xi^*)\frac{\partial z}{\partial a}+(\eta_0+\eta^*)\frac{\partial z}{\partial b}+(\zeta_0+\zeta^*)\frac{\partial z}{\partial c} = \xi_0\frac{\partial z}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial z}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial z}{\partial c}, \end{aligned}$$

$$(5)\quad 2\zeta^* = \frac{\partial B_1}{\partial a}-\frac{\partial A_1}{\partial b} = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial B}{\partial a}-\frac{\partial A}{\partial b}\right)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t}\left(-\frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial X}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial Y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial Z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right)dt$$

. . . . . .

aus und bemerken, daß jetzt außerhalb von $\underset{+}{T}$

$$A = X\frac{\partial x}{\partial a}+Y\frac{\partial y}{\partial a}+Z\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}, \qquad B = \frac{\partial U}{\partial b},$$

darum $\zeta^* = 0$ und ebenso $\xi^* = \eta^* = 0$, mithin auch $\xi = \eta = \zeta = 0$ ist. Im Innern von $\underset{+}{T}$ ist sowohl $\frac{\partial \xi_0}{\partial a}+\frac{\partial \eta_0}{\partial b}+\frac{\partial \zeta_0}{\partial c} = 0$ als auch $\frac{\partial \xi^*}{\partial a}+\frac{\partial \eta^*}{\partial b}+\frac{\partial \zeta^*}{\partial c} = 0$, darum

$$(5^*)\quad \frac{\partial \xi_0}{\partial a}+\frac{\partial \eta_0}{\partial b}+\frac{\partial \zeta_0}{\partial c} = 0.$$

Wir suchen jetzt diejenigen stetigen Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen,

$$(6)\quad \begin{aligned} &x = x(a,b,c,t), \quad y = y(a,b,c,t), \quad z = z(a,b,c,t);\\ &u = u(x,y,z,t), \quad v = v(x,y,z,t), \quad w = w(x,y,z,t), \end{aligned}$$

zu bestimmen, die stetige oder zumindest abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, den vorgegebenen Anfangsbedingungen genügen und im Unendlichen das durch die Beziehungen

$$u = O(R^{-2}), \ldots; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = O(R^{-3}), \ldots; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O(R^{-4}), \ldots$$

charakterisierte Verhalten haben. Was die möglichen Unstetigkeiten der partiellen Ableitungen der Funktionen (6) betrifft, so wollen wir annehmen,

daß sie nur auf $\underline{S}_0$ und S_0 eintreten können[3]). In jedem Stetigkeitsbereiche sollen schließlich $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial c^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ der H-Bedingung genügen.

Da u, v, w für alle (a, b, c) auf $\underline{S}_0$ und S_0 stetig sind, so sind ihre Tangentialableitungen, mithin die Normalableitungen der Wirbelkomponenten stetig. Wegen (4) erhalten wir daher zur Bestimmung von u, v, w die Integro-Differentialgleichungen[4])

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\eta' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\zeta' d\tau', \\
v &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\zeta' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\xi' d\tau', \qquad (6) \\
w &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\xi' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\eta' d\tau',
\end{aligned}
$$

und

$$
x = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\eta' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\overset{T}{+}} \frac{1}{r}\zeta' d\tau' \right\} \qquad (7)
$$

(vgl. die Formeln (86) und (87) auf S. 125). Der Existenzbeweis der Lösungen des Systems (6) und (7) wird, wie a. a. O. bemerkt, durch sukzessive Approximationen der Betrachtungen der §§ 1, 2, 3 parallel geführt. Beim Konvergenzbeweis wird das Integrationsgebiet $\overset{T}{+}$ derart in Teilgebiete zerlegt werden müssen, daß ξ, η, ζ sich in jedem Teilgebiete stetig verhalten. Hierzu ist nichts wesentliches weiter zu bemerken. Einige Erläuterungen erscheinen indessen nötig zum Beweis, daß die Lösungen der Integro-Differentialgleichungen (6), (7), (4), (5) tatsächlich die hydrodynamischen Gleichungen befriedigen. In § 5 ist dieser Gegenstand gar nicht berührt worden.

Aus (6) folgt vor allem durch Differentiation

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (8)
$$

Da es sich also um eine inkompressible Flüssigkeit handelt, so ist

$$
\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1. \qquad (9)
$$

[3]) Wie auf S. 115 ließe sich zeigen, daß andere (sprungweise) Unstetigkeiten nicht auftreten können.

[4]) Es sei bemerkt, daß für die Gültigkeit der Formeln (6) die Stetigkeit der Funktionen ξ, η, ζ keinesfalls notwendig ist. Es genügt, wenn auf etwaigen Flächen, auf denen ξ, η, ζ (sprungweise) Unstetigkeiten erleiden, die Normalkomponente des Vektors ξ, η, ζ immer noch stetig bleibt.

Hieraus sowie aus (4) und (5*) folgt (vgl. S. 110)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Es sei P_0 ein Punkt auf der Unstetigkeitsfläche $\underline{S}_0$. Wir legen zur Vereinfachung den Ursprung der Koordinaten im Raume a, b, c in den Punkt P_0 und die c-Achse in die Normale zu $\underline{S}_0$ in P_0 hinein. Die Gleichung (4) behält bei einer Koordinatentransformation ihre Form. Jetzt ändern sich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}; \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$ beim Übergang durch S_0 im Punkte P_0 für alle in Betracht kommenden t stetig. Nach (5) gilt für ζ^* das gleiche. Da nach Voraussetzung die Normalkomponente von ξ_0, η_0, ζ_0, d. h. ζ_0 ebenfalls diese Eigenschaft hat, so ändert sich auch ζ_0 in P_0 stetig. Wir wollen jetzt zeigen, daß auch die Normalkomponente des Vektors ξ, η, ζ in dem Punkte P der Unstetigkeitsfläche $\underline{S}$, der P_0 im Raume x, y, z entspricht, sich stetig verhält.

Die Kosinus der Winkel, die eine der beiden Richtungen der Flächennormale in $\underline{S}$ mit den Koordinatenachsen einschließt, sind

$$\frac{1}{D}\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)}, \frac{1}{D}\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)}, \frac{1}{D}\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}, \quad D^2 = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\right)^2 \tag{11}$$

Sind $\underline{\xi}_0, \underline{\eta}_0, \underline{\zeta}_0$ die Werte von ξ_0, η_0, ζ_0 in P_0 auf einer der beiden Seiten von $\underline{S}_0$, so hat auf der korrespondierenden Seite von $\underline{S}$ die Normalkomponente des Vektors ξ, η, ζ den Wert

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D}\left(\xi\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)} + \eta\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)} + \zeta\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\right) \\ &= \frac{1}{D}\left\{\underline{\xi}_0\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\right)\right. \\ &\quad + \underline{\eta}_0\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\right) \\ &\quad \left. + \underline{\zeta}_0\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Nun ist, da es sich um eine inkompressible Flüssigkeit handelt,

$$\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial(y,z)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial(z,x)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} = 1.$$

Nach einem elementaren Satze der Determinantentheorie, angewandt auf die zu $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}$ gehörige Matrix, sind die Koeffizienten von $\underline{\xi}_0$ und $\underline{\eta}_0$ gleich Null. Also ist die gesuchte Normalkomponente $= \frac{1}{D}\underline{\zeta}_0$. Da $\underline{\zeta}_0$ sich beim Übergang durch $\underline{S}_0$ stetig ändert, so gilt also, wie behauptet, für die Normalkomponente von ξ, η, ζ beim Übergang durch $\underline{S}$ das gleiche. Genau so liegen die Verhältnisse auf der Unstetigkeitsfläche S.

Nachdem also gezeigt worden ist, daß

3) $$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0$$

t und die Normalkomponente des Vektors ξ, η, ζ auf $\underline{S}$ und S stetig ist, lgen in bekannter Weise aus (6) die weiteren Beziehungen

4) $$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=2\xi, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=2\eta, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\zeta.$$

er Übergang zu den hydrodynamischen Gleichungen bietet jetzt keine chwierigkeiten mehr.

Im vorstehenden ist angenommen worden, daß außerhalb eines endchen Bereiches T_0 das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t_0 wirbelfrei ist und ußerhalb von $\underset{+}{T}$ die Einheitskräfte X, Y, Z für alle t von einem Potential errühren. Liegen der Betrachtung die allgemeineren Annahmen des § 5 ugrunde, so müssen die Verhältnisse in der Nachbarschaft des unendlich rnen Punktes näher untersucht werden. Bezüglich des Verhaltens der eschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0; u, v, w im Unendlichen dürften ier folgende Forderungen in Betracht kommen

15) $$u_0=O(R^{-1}),\ldots; \qquad \frac{\partial u_0}{\partial x}=O(R^{-2}),\ldots; \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=O(R^{-3}),\ldots;$$
$$\left|\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|\leqq \tilde{\alpha}_0 d_{12}^{\lambda}, \qquad \tilde{\alpha}_0=O(R^{-3-\lambda}),$$

16) $$u=O(R^{-1}),\ldots; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=O(R^{-2}),\ldots; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=O(R^{-3}),\ldots;$$
$$\left|\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|\leqq \tilde{\alpha} d_{12}^{\lambda}, \qquad \tilde{\alpha}=O(R^{-3-\lambda}).$$

Was die Komponenten der Einheitskräfte X, Y, Z betrifft, so wird man ie Existenz und Stetigkeit ihrer partiellen Ableitungen bis zur vierten rdnung einschließlich voraussetzen (in § 5 war nur von den Ableitungen rster und zweiter Ordnung die Rede). Bezüglich des Verhaltens im Unndlichen müssen geeignete Festsetzungen eingeführt werden.

Ich benutze die Gelegenheit für die folgenden Berichtigungen.

Auf S. 74 meiner Schrift „Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung", Leipzig 1923, (§ 3), sind die Formeln (2) und (3) ugenscheinlich nicht richtig. Sie sind durch die bekannten Formeln

2) $$f\left(\frac{d\Phi}{dt}-\frac{d\overline{\Phi}}{dt}-\frac{1}{2}(V^2-\overline{V}^2)\right)=f(\mathfrak{U}-\overline{\mathfrak{U}})-(p-p_0),$$
$$V^2=u^2+v^2+w^2$$

und

$$\frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{2}V^2 = \mathsf{U} - \mathsf{U}_0 + c(t) \tag{3}$$

zu ersetzen. An den Entwicklungen des § 3 ist nichts weiter zu ändern.

In meinem Referat „Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung", Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, C II 3, bedürfen, wie ich neuerdings bemerkt habe, einige Formeln einer Korrektur.

S. 201 Zeile 8 v. o. muß es heißen:

$$|V(s) - V(t)| < \mathrm{Max}\,|\mu(s)|\,(A\,|\log r_{st}| + A')\,r_{st} \qquad (A, A' \text{ konstant}).$$

S. 205 Zeile 2 v. o. lese:

$$|W(s) - W(t)| < \mathrm{Max}\,|\nu(s)|\,(c_1\,|\log r_{st}| + c_2)\,r_{st} \qquad (c_1, c_2 \text{ konstant}),$$

S. 205 Zeile 6 v. o. lese:

$$|\overline{W}(s) - \overline{W}(t)| < \mathrm{Max}\,|\nu(s)|\,(c_3\,|\log r_{st}| + c_4)\,r_{st} \qquad (c_3, c_4 \text{ konstant})$$

S. 207 Zeile 12 v. o. muß es heißen:

$$|D_1 P(\xi_1, \eta_1) - D_1 P(\xi_2, \eta_2)| < \{q\}\,(A_1\,|\log \delta_{12}| + A_2)\,\delta_{12}.$$

In der Abhandlung „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsfragen", (Math. Zeitschr. **7** (1920), S. 126—231), sind die Formeln (36) und (37), S. 152, wie folgt zu berichtigen:

$$\vartheta(\sigma) = \int_S \frac{1}{\psi}\,\frac{\chi_1(\sigma')}{\varrho}\,d\sigma', \tag{36}$$

$$\int_S \psi\,\vartheta\,\chi\,d\sigma = -\sum \int_S \psi\,\chi\,u^{(n)}\,d\sigma \int_S \psi\,\vartheta\,u^{(n)}\,d\sigma. \tag{37}$$

Zu der vierten Abhandlung der Serie „Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper" (Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 62—110) ist S. 72 zu bemerken:

Die Gleichungen (27) haben periodische Lösungen mit der Periode $2\pi R$, auch wenn $\gamma = \frac{1}{m}\sqrt{2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}}$ $(m \gtrless 0$ ganz$)$ ist. Es ist darum nicht, wie im Text angegeben ist,

$$\gamma^2 \neq 2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R},$$

sondern

$$\gamma \neq \frac{1}{m}\left(2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (m \gtrless 0 \text{ ganz})$$

vorauszusetzen.

Berlin, den 10. April 1925.

(Eingegangen am 10. April 1925.)